

***Verallgemeinerte  
fastperiodische Funktionen  
auf Halbgruppen***

---

***Inaugural-Dissertation***

***zur***

***Erlangung der Doktorwürde***

***der Hohen Naturwissenschaftlichen Fakultät***

***der Ludwig-Maximilians-Universität zu München***

***vorgelegt von***

***Horst Keiner***

***aus Coburg***

---

***Juli 1956***







*Verallgemeinerte  
fastperiodische Funktionen  
auf Halbgruppen*

---

*Inaugural-Dissertation*

*zur*

*Erlangung der Doktorwürde*

*der Hohen Naturwissenschaftlichen Fakultät*

*der Ludwig-Maximilians-Universität zu München*

*vorgelegt von*

*Horst Keiner*

*aus Coburg*

---



*Juli 1956*



Berichterstatter: Professor Dr. W. MAAK

Tag der Prüfung: | 4. Dez. 1957



## Einleitung.

Das Ziel dieser Arbeit ist die Herleitung der wesentlichen Eigenschaften  $\omega$ -fastperiodischer Funktionen auf Halbgruppen. Diese verallgemeinerten fastperiodischen Funktionen sind wie folgt definiert: Eine beliebige Teilmenge  $\mathcal{N}$  einer Halbgruppe  $\mathcal{G} = \{a, b, c, d, \dots, x, y, \dots\}$  heißt Nullmenge, wenn ihr "ueres Maß"

$$\mu(\mathcal{N}) = \inf_{\substack{a_1, \dots, a_n \\ n \geq 1}} \sup_{c, d \in \mathcal{G}} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n \chi(ca_\nu d)$$

gleich null ist, wobei  $\chi(x)$  die charakteristische Funktion von  $\mathcal{N}$  bedeutet. Eine komplexwertige und beschränkte Funktion  $f(x)$  auf  $\mathcal{G}$  heißt dann  $\omega$ -fastperiodisch, wenn zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine endliche Überdeckung von  $\mathcal{G}$  durch Teilmengen  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$  und eine Nullmenge  $\mathcal{N}_\varepsilon$  mit folgender Eigenschaft existieren: Wenn zwei beliebige Halbguppenelemente  $x, y$  mittels Transformation durch zwei weitere,  $c', d'$ , in ein und dieselbe Teilmenge geworfen werden können:  $c'xd', c'yd' \in \mathcal{A}_\nu$  ( $\nu = 1, \dots, n$ ), dann gilt stets

$$|f(cxd) - f(cyd)| < \varepsilon,$$

wofern nicht  $cxd$  oder  $cyd \in \mathcal{N}_\varepsilon$ .

Die fastperiodischen Funktionen auf  $\mathcal{G}$  sind eine Teilmenge aller  $\omega$ -fastperiodischen; man erhält sie durch die Forderung, daß  $\mathcal{N}_\varepsilon$  leer für jedes  $\varepsilon > 0$  sein soll. - Es zeigt sich, daß viele Sätze aus der Theorie der fastperiodischen Funktionen auch für die  $\omega$ -fastperiodischen Gültigkeit haben. So bildet die Menge der  $\omega$ -fastperiodischen Funktionen auf einer Halbgruppe  $\mathcal{G}$  einen komplexen linearen Raum, der verschiebungsinvariant gegenüber  $\mathcal{G}$  und abgeschlossen bezüglich gleichmäßiger Konvergenz ist. Ferner besitzt jede  $\omega$ -fastperiodische Funktion einen eindeutig bestimmten Integralmittelwert, welcher die üblichen Eigenschaften hat. Mit Hilfe der Existenz dieses Mittelwertes kann man einen Zerlegungssatz folgern, der so lautet:



Eine Funktion  $f(x)$  auf  $\mathcal{G}$  ist genau dann  $\omega$ -fastperiodisch, wenn sie sich in der Form

$$(1) \quad f(x) = \varphi(x) + \omega(x)$$

darstellen läßt, wobei  $\varphi(x)$  fastperiodisch und  $\omega(x)$  "Nullfunktion" ist. Die Zerlegung (1) ist durch  $f(x)$  eindeutig bestimmt. Hierbei heißt eine beschränkte Funktion  $\omega(x)$  Nullfunktion, wenn sie höchstens auf einer Nullmenge wesentlich von null verschieden ist, d. h. wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine Nullmenge  $\mathcal{N}_\varepsilon$  gibt, so daß

$$|\omega(x)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in \mathcal{G} - \mathcal{N}_\varepsilon$$

gilt. - Aus dem Zerlegungssatz ergibt sich, daß die Fourierreihe einer  $\omega$ -fastperiodischen Funktion  $f(x)$  mit der ihres in (1) auftretenden "fastperiodischen Anteils"  $\varphi(x)$  übereinstimmt.

Der von M. FRÉCHET [3] für die additive Halbgruppe der nicht-negativen reellen Zahlen eingeführte Begriff "asymptotisch fastperiodisch" läßt sich leicht auf beliebige abelsche Halbgruppen übertragen. Die asymptotisch fastperiodischen (abgekürzt:  $\alpha$ -fastperiodischen) Funktionen stellen sich dann als solche  $\omega$ -fastperiodische Funktionen heraus, bei denen als Nullmengen  $\mathcal{N}_\varepsilon$  nur die "Anfangsabschnitte"  $\mathcal{G} - a\mathcal{G}$  der Halbgruppe  $\mathcal{G}$  zugelassen sind. Man kann daher die Theorie der  $\omega$ -fastperiodischen Funktionen auf die  $\alpha$ -fastperiodischen anwenden und insbesondere einen dem Zerlegungssatz analogen Satz folgern; die in (1) auftretende Nullfunktion  $\omega(x)$  ist dabei von spezieller Art: Zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es ein Halbgruppenelement  $a$ , so daß

$$|\omega(x)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in a\mathcal{G}$$

gilt. Dieser Zerlegungssatz kann jedoch auch ohne Zuhilfenahme der Existenz des Integralmittelwertes direkt aus der Definition der  $\alpha$ -fastperiodischen Funktionen bewiesen werden. Aus dem Zerlegungssatz ergibt sich dann leicht der Mittelwertsatz.



Schließlich wird man versuchen, den Wertebereich der  $\omega$ -fast-periodischen Funktionen zu verallgemeinern; statt komplexwertiger Funktionen betrachtet man Funktionen mit Werten in einem beliebigen komplexen Banachraum. Auch hier gelten die entsprechenden Sätze, vor allem der Zerlegungssatz.

---

Im ersten Abschnitt befassen wir uns mit  $\omega$ -fastperiodischen Funktionen. Zunächst wird für eine umfassendere Funktionenklasse, nämlich die der  $\omega$ -Funktionen, der Mittelwertsatz hergeleitet (§1). Dabei verwenden wir die bei Gruppen bekannte Beweismethode (vgl. MAAK [7]), welche für Halbgruppen leicht modifiziert werden muß. Im §2 werden die  $\omega$ -fastperiodischen Funktionen definiert und ihre wichtigsten elementaren Eigenschaften bewiesen. §3 bringt den Zerlegungssatz, aus welchem im §4 einige Folgerungen gezogen werden.

Der zweite Abschnitt ist den asymptotisch fastperiodischen Funktionen gewidmet. Nach der Definition und einigen einleitenden Betrachtungen (§5) wird eine Eigenschaft gewisser Folgen solcher Funktionen abgeleitet (§6), welche der Definition III von FRÉCHET [3] entspricht. Daraus folgern wir im §7 den Zerlegungssatz, und zwar - im Gegensatz zum ersten Abschnitt - ohne die Existenz des Mittelwertes zu verwenden. Aus dem Zerlegungssatz ergibt sich dann leicht der Mittelwertsatz (§8).

In einem Anhang verallgemeinern wir den Wertebereich unserer Funktionen; wir betrachten  $\omega$ -fastperiodische Funktionen mit Werten in einem Banachraum.



## Inhaltsübersicht.

Seite

### I. $\omega$ -fastperiodische Funktionen auf Halbgruppen.

|                                                |    |
|------------------------------------------------|----|
| § 1. Mittelwert und $\omega$ -Funktionen       | 1  |
| § 2. Die $\omega$ -fastperiodischen Funktionen | 9  |
| § 3. Der Zerlegungssatz                        | 13 |
| § 4. Folgerungen aus dem Zerlegungssatz        | 21 |

### II. Asymptotisch fastperiodische Funktionen auf abelschen Halbgruppen.

|                                                                           |    |
|---------------------------------------------------------------------------|----|
| § 5. Definition der $\alpha$ -fastperiodischen Funktionen                 | 24 |
| § 6. Eine Eigenschaft von Folgen $\alpha$ -fastperiodischer<br>Funktionen | 27 |
| § 7. Der Zerlegungssatz für $\alpha$ -fastperiodische Funktionen          | 31 |
| § 8. Der Mittelwertsatz                                                   | 35 |

### Anhang: $\omega$ -fastperiodische Funktionen mit Werten in einem Banachraum.

37

### Literaturverzeichnis

41



# I. $\omega$ -fastperiodische Funktionen auf Halbgruppen.

In diesem Kapitel sei  $\mathcal{G}$  eine beliebige Halbgruppe, deren Elemente mit  $a, b, c, \dots, x, y, \dots$  bezeichnet werden;  $\mathcal{G}$  enthalte ein neutrales Element. In  $\mathcal{G}$  ist also eine assoziative Verknüpfung erklärt: mit zwei beliebigen Elementen  $a, b$  aus  $\mathcal{G}$  liegt auch ihr "Produkt"  $a \cdot b$  wieder in  $\mathcal{G}$ ; ferner gibt es ein  $e \in \mathcal{G}$  mit der Eigenschaft, daß für jedes  $a \in \mathcal{G}$  die Beziehung  $ae = ea = a$  gilt.

## § 1. Mittelwert und $\omega$ -Funktionen.

Wir betrachten komplexwertige Funktionen auf der Halbgruppe  $\mathcal{G}$  und wollen aus diesen eine Klasse "mittelbarer" Funktionen aussondern. Dazu wiederholen wir kurz, wann man eine Funktion stark ergodisch nennt (s. MAAK [7]); da in unseren Betrachtungen nur stark ergodische Funktionen auftreten werden, wollen wir den Zusatz "stark" weglassen.

Eine komplexwertige Funktion  $f(x)$  der Elemente  $x \in \mathcal{G}$  heißt ergodisch, wenn es zu jedem  $\epsilon > 0$  eine komplexe Zahl  $M\{f(x), \epsilon\}$  und gewisse Halbgroupelemente  $a_1, \dots, a_n$  gibt, so daß für beliebige  $c, d$

$$\left| M\{f(x), \epsilon\} - \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n f(ca_\nu d) \right| < \epsilon$$

gilt. Die Zahl  $M\{f(x), \epsilon\}$  heißt  $\epsilon$ -Näherungsmittel zu  $f(x)$ . Genau wie im Falle der fastperiodischen Funktionen auf Gruppen zeigt man nun für ergodische Funktionen, daß sich zwei Näherungsmittel  $M\{f(x), \epsilon\}$  und  $M\{f(x), \epsilon'\}$  nicht beträchtlich unterscheiden:  $|M\{f(x), \epsilon\} - M\{f(x), \epsilon'\}| < \epsilon + \epsilon'$  und folgert daraus die Existenz einer durch  $f(x)$  eindeutig bestimmten komplexen Zahl

$$M(f) = M_x\{f(x)\} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} M\{f(x), \epsilon\},$$

welche Mittelwert von  $f(x)$  heißt. (Vgl. MAAK [5] §9; dort wird beim Beweis der entsprechenden Sätze (Satz 4 u. 5) weder die Fastperiodizität von  $f(x)$  noch die Existenz des in-



versen Gruppenelementes benutzt, sondern nur vom Vorhandensein der Näherungsmittel zu  $f(x)$  Gebrauch gemacht.)

Jede ergodische Funktion  $f(x)$  hat also einen Mittelwert  $M(f)$ , dieser ist eindeutig bestimmt und die "Mittelwertoperation"  $f \rightarrow M(f)$  ist linear, invariant, monoton und normiert, d. h. sind  $f(x)$  und  $g(x)$  ergodisch, so gilt mit beliebigen komplexen  $\alpha$  und  $\beta$   $M(\alpha f + \beta g) = \alpha M(f) + \beta M(g)$  und mit beliebigen  $c$  und  $d$  aus  $\mathcal{G}$   $M_X\{f(cxd)\} = M_X\{f(x)\}$ ; sind ferner  $f(x)$  und  $g(x)$  reell mit  $f(x) \leq g(x)$ , so ist  $M(f) \leq M(g)$ ; es ist  $M(1) = 1$  (s. MAAK [7], §1).

Wir führen nun auch für Halbgruppen den Begriff "äußeres Maß" ein, um die Mittelwerttheorie der  $\omega$ -Funktionen auf Halbgruppen übertragen zu können (vgl. MAAK [7], §2). Ist  $\mathcal{K}$  eine Teilmenge von  $\mathcal{G}$ , so heißt die Funktion

$$\chi_{\mathcal{K}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathcal{K} \\ 0, & \text{falls } x \in \mathcal{G} - \mathcal{K} \end{cases}$$

bekanntlich die charakteristische Funktion von  $\mathcal{K}$ . Damit kommen wir zur

Definition 1:  $\mu(\mathcal{K}) = \inf_{n \geq 1} \sup_{c, d \in \mathcal{G}} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n \chi_{\mathcal{K}}(ca_{\nu}d)$

heißt äußeres Maß von  $\mathcal{K}$ .  $\mathcal{K}$  heißt Nullmenge, wenn  $\mu(\mathcal{K}) = 0$  ist.

Man sieht sofort, daß mit  $\mathcal{K}_1$  und  $\mathcal{K}_2$  auch  $\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$  bzw. mit  $\mathcal{K}$  bei beliebigen  $c, d \in \mathcal{G}$  auch  $c\mathcal{K}d$  Nullmenge ist.

Satz 1:  $\mathcal{K}$  ist genau dann eine Nullmenge, wenn  $\chi_{\mathcal{K}}(x)$  ergodisch mit dem Mittelwert null ist.

Beweis: Ist  $\mu(\mathcal{K}) = 0$ , dann gibt es zu beliebig vorgegebenem  $\varepsilon > 0$  gewisse Halbgruppenelemente  $a_1, \dots, a_n$ , so daß

$$(1) \quad \sup_{c, d \in \mathcal{G}} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n \chi_{\mathcal{K}}(ca_{\nu}d) \leq \varepsilon$$

gilt. Mit diesen  $a_{\nu}$  ist also für alle  $c, d \in \mathcal{G}$

$$(2) \quad \left| 0 - \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n \chi_{\mathcal{K}}(ca_{\nu}d) \right| \leq \varepsilon.$$



Gibt es umgekehrt zu beliebigem  $\varepsilon > 0$  gewisse  $a_1, \dots, a_n$ , so daß die Ungleichung (2) für alle  $c, d \in \mathcal{G}$  erfüllt ist, dann ist (1) für jedes  $\varepsilon$  richtig, woraus sich  $\mu(\mathcal{N}) = 0$  ergibt.

Mehrfach anwenden werden wir den

Satz 2: Ist  $\mathcal{N}$  eine Nullmenge und sind  $\bar{c}, \bar{d}$  beliebige feste Elemente aus  $\mathcal{G}$ , so ist auch  $\mathcal{M} = \{m: \bar{c}m\bar{d} \in \mathcal{N}\}$  eine Nullmenge.

Beweis: Es ist  $\chi_{\mathcal{M}}(x) = \chi_{\mathcal{N}}(\bar{c}x\bar{d})$ . Wegen der Invarianz der Mittelwertoperation folgt nach Satz 1

$$0 = M_X \{ \chi_{\mathcal{N}}(x) \} = M_X \{ \chi_{\mathcal{N}}(\bar{c}x\bar{d}) \} = M_X \{ \chi_{\mathcal{M}}(x) \}.$$

Mit Hilfe der Nullmengen können wir nun auch auf Halbgruppen die  $\omega$ -Funktionen einführen (vgl. MAAK [7], §2).

Definition 2: Eine komplexwertige und beschränkte Funktion  $f(x)$  auf  $\mathcal{G}$  heißt  $\omega$ -Funktion, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine endliche Anzahl von Teilmengen  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$  von  $\mathcal{G}$  und eine Nullmenge  $\mathcal{N}_\varepsilon \subset \mathcal{G}$  gibt, so daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$1) \mathcal{A}_1 \cup \dots \cup \mathcal{A}_n \cup \mathcal{N}_\varepsilon = \mathcal{G};$$

$$2) \text{ Gilt für gewisse Elemente } x, y, c', d' \text{ und geeignetes } \nu = 1, \dots, n \\ c'xd', c'yd' \in \mathcal{A}_\nu,$$

so folgt für alle  $c, d \in \mathcal{G}$ , für welche

$$cxd, cyd \in \mathcal{G} - \mathcal{N}_\varepsilon$$

erfüllt ist,

$$|f(cxd) - f(cyd)| < \varepsilon.$$

Das eben erklärte Mengensystem  $\{\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n, \mathcal{N}_\varepsilon\}$  heißt eine Teilung  $\mathcal{T}\{f(x), \varepsilon\}$  zu  $f(x)$  und  $\varepsilon$ . Eine Teilung  $\mathcal{T}\{f(x), \varepsilon\}$  heißt Minimalteilung, wenn zu  $\varepsilon > 0$  die  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n, \mathcal{N}_\varepsilon$  so gewählt sind, daß  $n$  den kleinstmöglichen Wert hat.

Die  $\omega$ -Funktionen stellen eine gewisse Verallgemeinerung der fastperiodischen Funktionen dar. Letztere erhält man, wenn man als Nullmenge  $\mathcal{N}_\varepsilon$  für jedes  $\varepsilon$  die leere Menge wählt. Ist  $\mathcal{G}$  eine Gruppe, so ist die obige Definition mit der üblichen äquivalent, dies zeigt man genau wie im Falle der fastperiodischen Funktionen (s. MAAK [8]). Die  $\omega$ -Funktionen sind nicht zu verwechseln mit den  $\omega$ -fastperiodischen Funktionen, welche später definiert werden.



Unser Ziel ist nun der Nachweis, daß jede  $\omega$ -Funktion ergodisch ist, also einen Mittelwert besitzt. Der Beweis läuft ähnlich wie der bei Gruppen (MAAK [7], §2). Wir geben zunächst einige Eigenschaften von Minimalteilungen an.

Satz 3: Ist  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \pi_\varepsilon\}$  eine Minimalteilung  $\mathcal{T}\{f(x), \varepsilon\}$ , so gilt  $\mu(\alpha_\nu) > 0$  für alle  $\nu = 1, \dots, n$ .

Wäre nämlich für irgendein  $\nu$   $\mu(\alpha_\nu) = 0$ , so könnten wir die Nullmenge  $\pi_\varepsilon$  durch die Nullmenge  $\pi'_\varepsilon = \pi_\varepsilon \cup \alpha_\nu$  ersetzen und das Mengensystem  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{\nu-1}, \alpha_{\nu+1}, \dots, \alpha_n, \pi'_\varepsilon\}$  würde eine Teilung mit weniger Teilen als  $\mathcal{T}\{f(x), \varepsilon\}$  liefern.

Satz 4: Sei  $f(x)$  eine  $\omega$ -Funktion und  $\varepsilon > 0$  beliebig vorgegeben.

$\{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \pi_\varepsilon\}$  und  $\{\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n, \pi_\varepsilon\}$  seien zwei Minimalteilungen zu  $f(x)$  und  $\varepsilon$ . Dann gibt es eine Permutation

$(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  der Zahlen  $1, \dots, n$  sowie  $n$  Halbgruppenelemente  $h_1, \dots, h_n$ , so daß für alle  $\nu = 1, \dots, n$

$$h_\nu \in \alpha_\nu \cap \mathcal{L}_{\lambda_\nu}$$

gilt.

Dies bedeutet, kurz gesagt, daß zwei Minimalteilungen ein gemeinsames Repräsentantensystem besitzen. Den Satz 4 werden wir im folgenden nicht benutzen, wir führen ihn hier nur an, weil er von prinzipiellem Interesse ist, er wird wie der entsprechende Satz für Gruppen bewiesen (s. MAAK [7], §2). Wesentlich anders läuft hingegen der Beweis von

Satz 5: Sei  $f(x)$  eine  $\omega$ -Funktion und  $\varepsilon > 0$  beliebig vorgegeben.

$\{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \pi_\varepsilon\}$  sei eine Minimalteilung zu  $f(x)$  und  $\varepsilon$ , und  $\bar{c}, \bar{d}$  seien zwei beliebige, aber feste Elemente aus  $\mathcal{G}$ .

Dann gibt es eine Permutation  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  der Zahlen  $1, \dots, n$  und  $n$  Halbgruppenelemente  $h_1, \dots, h_n$ , so daß für alle

$\nu = 1, \dots, n$

$$(3) \quad h_\nu \in \alpha_\nu \cap \bar{c} \alpha_{\lambda_\nu} \bar{d}$$

gilt.

Beweis: Wir betrachten die Mengen

$$\mathcal{L}_1 = \bar{c} \alpha_1 \bar{d}, \dots, \mathcal{L}_n = \bar{c} \alpha_n \bar{d}, \pi'_\varepsilon = \bar{c} \pi_\varepsilon \bar{d} \cup \pi_\varepsilon$$

( $\pi'_\varepsilon$  ist eine Nullmenge). Wäre nun  $\mathcal{G}$  eine Gruppe, so würde dieses System wieder eine Teilung bilden und Satz 4 wäre anwendbar.

In unserem Falle aber überdecken diese Mengen im allgemeinen



nicht die ganze Halbgruppe. Daher müssen wir anders vorgehen. Aus dem System aller  $\mathcal{L}_v$  wählen wir irgendwelche  $r$  Mengen  $\mathcal{L}_{v_1}, \dots, \mathcal{L}_{v_r}$  ( $1 = r = n$ ) aus und suchen alle  $\alpha_\lambda$ , für welche

$$(4) \quad (\mathcal{L}_{v_1} \cup \dots \cup \mathcal{L}_{v_r}) \cap \alpha_\lambda \neq \emptyset$$

ist. Die sämtlichen  $\alpha_\lambda$  mit dieser Eigenschaft seien etwa  $\alpha_{\lambda_1}, \dots, \alpha_{\lambda_s}$ . Wir wollen zeigen, daß, von welchen Mengen  $\mathcal{L}$  wir auch ausgehen, stets  $s \geq r$  ist. Dann können wir den kombinatorischen Hilfssatz anwenden (s. MAAK [5], [7]) und es folgt die Existenz einer Permutation und gewisser Elemente  $h_v$ , so daß (3) erfüllt ist. --- Zunächst finden wir, daß

$$(5) \quad \mathcal{L}_{v_1} \cup \dots \cup \mathcal{L}_{v_r} \subseteq \alpha_{\lambda_1} \cup \dots \cup \alpha_{\lambda_s} \cup \mathcal{M}_\varepsilon$$

gilt. Denn gäbe es ein  $a$  und ein  $v_s$ , so daß  $a$  in  $\mathcal{L}_{v_s}$ , jedoch in keinem der  $\alpha_{\lambda_\sigma}$  und auch nicht in  $\mathcal{M}_\varepsilon$  liegen würde, so müßte, weil  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \mathcal{M}_\varepsilon\}$  eine Überdeckung von  $\mathcal{G}$  ist,  $a$  in einem  $\alpha_m$  liegen, welches nicht unter den  $\alpha_{\lambda_\sigma}$  aufgeführt ist. Dann aber wäre  $\alpha_m \cap \mathcal{L}_{v_s} \neq \emptyset$ , und das ist ein Widerspruch, weil  $\alpha_{\lambda_1}, \dots, \alpha_{\lambda_s}$  bereits alle Mengen  $\alpha$  waren, welche (4) erfüllten.

Nun bilden wir neue Teilmengen  $\mathcal{L}_\sigma$  ( $\sigma = 1, \dots, s$ ) und  $\mathcal{M}_\varepsilon$  gemäß der Vorschrift

$$x \in \mathcal{L}_\sigma \text{ dann und nur dann, wenn } \bar{c}x\bar{d} \in \alpha_{\lambda_\sigma},$$

$$x \in \mathcal{M}_\varepsilon \text{ dann und nur dann, wenn } \bar{c}x\bar{d} \in \mathcal{M}_\varepsilon.$$

Nach Satz 2 ist  $\mathcal{M}_\varepsilon$  eine Nullmenge, also auch  $\mathcal{L}_\varepsilon = \mathcal{M}_\varepsilon \cup \mathcal{M}_\varepsilon$ .

Das Mengensystem

$$(6) \quad \{\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_s, \alpha_{v_{r+1}}, \dots, \alpha_{v_n}, \mathcal{L}_\varepsilon\}$$

ist eine Teilung  $\mathcal{G} \setminus \{f(x), \varepsilon\}$ . Haben wir dies gezeigt, so muß, weil  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \mathcal{M}_\varepsilon\}$  als minimal vorausgesetzt war,  $s+n-r \geq n$ , also  $s \geq r$  sein und die Anwendung des kombinatorischen Hilfssatzes ergibt die Aussage unseres Satzes.

Um zu beweisen, daß (6) eine Teilung zu  $f(x)$  und  $\varepsilon$  ist, prüfen wir die beiden Bedingungen der Definition 2 nach.

1) Weil  $\alpha_{v_1} \cup \dots \cup \alpha_{v_r} \cup \alpha_{v_{r+1}} \cup \dots \cup \alpha_{v_n} \cup \mathcal{M}_\varepsilon = \mathcal{G}$  ist, brauchen wir nur zu zeigen, daß aus  $x \in \alpha_{v_g}$  ( $g = 1$  oder  $\dots$  oder  $r$ ) folgt  $x \in \bigcup_{\sigma=1}^s \mathcal{L}_\sigma \cup \mathcal{L}_\varepsilon$ . Ist  $x$  aus irgendeinem  $\alpha_{v_g}$ , so gilt  $\bar{c}x\bar{d} \in \alpha_{\lambda_g}$ . Nach (5) gibt es dann entweder mindestens ein  $\sigma$  mit  $\bar{c}x\bar{d} \in \alpha_{\lambda_\sigma}$ , oder  $\bar{c}x\bar{d}$  liegt in  $\mathcal{M}_\varepsilon$ . Im ersten Fall folgt  $x \in \mathcal{L}_\sigma$ , im zweiten Fall gilt  $x \in \mathcal{M}_\varepsilon \subseteq \mathcal{L}_\varepsilon$ . Also ist (6) eine Überdeckung von  $\mathcal{G}$ .



2) Gilt für  $x, y, c', d'$   $c'xd', c'yd' \in \mathcal{A}_{\nu_\mu}$  ( $\mu = r+1$  oder... oder  $n$ ), so ist voraussetzungsgemäß für alle  $c, d \in \mathcal{G}$  mit  $cx d, cy d \in \mathcal{G} - \mathcal{N}_\varepsilon$  die Ungleichung

$$(7) \quad |f(cxd) - f(cyd)| < \varepsilon$$

erfüllt, also erst recht für alle  $c, d$  mit  $cx d, cy d \in \mathcal{G} - \mathcal{L}_\varepsilon$ . Sind andererseits  $x, y, c', d'$  so beschaffen, daß für geeignetes  $\sigma$  gilt  $c'xd', c'yd' \in \mathcal{L}_\sigma$ , dann haben nach Konstruktion von  $\mathcal{L}_\sigma$  die Elemente  $x, y, c'' = \bar{c}c', d'' = \bar{d}d'$  die Eigenschaft, daß  $c''xd'', c''yd''$  in  $\mathcal{A}_{\lambda_\sigma}$  liegen. Also ist wiederum für alle  $c, d \in \mathcal{G}$  mit  $cx d, cy d \in \mathcal{G} - \mathcal{N}_\varepsilon$  und daher erst recht für alle  $c, d$  mit  $cx d, cy d \in \mathcal{G} - \mathcal{L}_\varepsilon$  die Ungleichung (7) erfüllt.

Somit ist gezeigt, daß (6) eine Teilung zu  $f(x)$  und  $\varepsilon$  ist, q. e. d..

Bemerkung: Der eben bewiesene Satz besagt, daß sich die Teile  $\mathcal{A}_\nu$  einer Minimalteilung quer durch die ganze Halbgruppe erstrecken, oder, daß die Elemente eines Teiles  $\mathcal{A}_\nu$  in einem gewissen Sinne "relativ dicht in  $\mathcal{G}$ " liegen. Der durchgeführte Beweis bleibt natürlich gültig, wenn man die Nullmenge  $\mathcal{N}_\varepsilon$  (für jedes  $\varepsilon > 0$ ) durch die leere Menge ersetzt; es werden dann  $\mathcal{N}_\varepsilon', \mathcal{M}_\varepsilon, \mathcal{L}_\varepsilon$  ebenfalls leer. Damit ist der Beweis des entsprechenden Satzes für fastperiodische Funktionen auf Halbgruppen (s. MAAK [7], S. 47, [8], S. 40) vereinfacht; man benötigt nicht den Begriff der "Teilung  $\mathcal{T}\{f(x), a_0, b_0, \varepsilon\}$ ", der dort zum Zwecke des Beweises ebendieses Satzes eingeführt wurde.

Genau wie im Falle der Gruppen beweist man

Satz 6: Sei  $f(x)$  eine  $\omega$ -Funktion und  $\varepsilon > 0$  beliebig vorgegeben.

$\{a_1, \dots, a_n, \mathcal{N}_\varepsilon\}$  sei eine Minimalteilung zu  $f(x)$  und  $\varepsilon, \chi(x)$  die charakteristische Funktion von  $\mathcal{N}_\varepsilon$ . Zu jedem  $\delta > 0$  gibt es dann eine natürliche Zahl  $N$  und  $Nn$  Halbgruppenelemente  $v_\nu^{(i)}$  mit  $v_\nu^{(i)} \in a_\nu$ ,  $\nu = 1, \dots, n$ ,  $i = 1, \dots, N$ , so daß für alle  $c, d \in \mathcal{G}$  folgt

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \chi(cv_\nu^{(i)}d) < \delta.$$

Von den Elementen  $v_\nu^{(1)}, \dots, v_\nu^{(N)}$  fallen also bei beliebiger Verschiebung um  $c$  und  $d$  stets nur verhältnismäßig wenige in die Nullmenge  $\mathcal{N}_\varepsilon$  (s. MAAK [7], §2, Satz 5).



Nun können wir den Mittelwertsatz für  $\omega$ -Funktionen beweisen.

Satz 7 (Mittelwertsatz): Jede  $\omega$ -Funktion  $f(x)$  ist ergodisch, d. h. genauer: Zu beliebig vorgegebenem  $\varepsilon > 0$  gibt es gewisse Halbgruppenelemente  $w_1, \dots, w_m$ , so daß für alle  $c, d$

$$\left| \frac{1}{m} \sum_{\mu=1}^m f(w_{\mu}) - \frac{1}{m} \sum_{\mu=1}^m f(cw_{\mu}d) \right| < \varepsilon$$

gilt.

Beweis: Wir gehen genau wie bei Gruppen vor. Es sei  $\varepsilon > 0$  vorgegeben. Wir bestimmen eine minimale Teilung  $\mathcal{H}\{f(x), \varepsilon/3\}$ , welche aus den Teilen  $\{a_1, \dots, a_n, \pi_{\varepsilon/3}\}$  bestehen möge. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß  $(a_1 \cup \dots \cup a_n) \cap \pi_{\varepsilon/3} = \emptyset$  ist. (Gilt dies nicht von vorneherein, so ersetzen wir  $a_{\nu}$  durch  $a_{\nu} - (a_{\nu} \cap \pi_{\varepsilon/3})$ .)  $c$  und  $d$  seien zwei beliebige Elemente aus  $\mathcal{G}$ . Gemäß Satz 5 bestimmen wir nun die gemeinsamen Repräsentanten  $h_1, \dots, h_n$  der Mengensysteme  $\{a_1, \dots, a_n\}$  und  $\{ca_1d, \dots, ca_nd\}$ , es sei also

$$h_{\nu} \in a_{\nu} \cap ca_{\lambda_{\nu}}d,$$

wobei  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  eine Permutation der Zahlen  $1, \dots, n$  bedeutet. Da  $f(x)$  als  $\omega$ -Funktion beschränkt ist, gibt es eine reelle Zahl  $K$  mit

$$\sup_{x \in \mathcal{G}} |f(x)| = K.$$

Wir setzen nun  $\delta = \frac{\varepsilon}{6 \cdot K}$  und bestimmen dazu die in Satz 6 genannten  $N \cdot n$  Elemente  $v_{\nu}^{(i)}$  ( $\nu=1, \dots, n$   $i=1, \dots, N$ ). Schließlich setzen wir  $m=Nn$  und bezeichnen die  $v_{\nu}^{(i)}$  in irgendeiner Weise mit  $w_{\mu}$  ( $\mu=1, \dots, m$ ). Dann können wir folgendermaßen abschätzen (wobei die Summation über  $\mu$  von 1 bis  $m$ , die über  $\nu$  von 1 bis  $n$  und die über  $i$  von 1 bis  $N$  zu erstrecken ist):

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{m} \sum_{\mu} f(w_{\mu}) - \frac{1}{m} \sum_{\mu} f(cw_{\mu}d) \right| &= \left| \frac{1}{nN} \sum_{i, \nu} f(v_{\nu}^{(i)}) - \frac{1}{nN} \sum_{i, \nu} f(cv_{\nu}^{(i)}d) \right| \\ &= \frac{1}{nN} \left| \sum_{i, \nu} (f(v_{\nu}^{(i)}) - f(cv_{\nu}^{(i)}d)) \right| \leq \frac{1}{nN} \sum_{i, \nu} |f(v_{\nu}^{(i)}) - f(cv_{\nu}^{(i)}d)| \\ &\leq \frac{1}{nN} \sum_{i, \nu} (|f(v_{\nu}^{(i)}) - f(h_{\nu})| + |f(h_{\nu}) - f(cv_{\nu}^{(i)}d)|) \end{aligned}$$



Es ist  $|f(v_{\nu}^{(i)}) - f(h_{\nu})| < \varepsilon/3$ , weil  $v_{\nu}^{(i)}$  und  $h_{\nu}$  aus  $\mathcal{A}_{\nu}$  sind und  $\mathcal{A}_{\nu} \cap \mathcal{H}_{\varepsilon/3} = \emptyset$  ist (Bedingung 2 der Definition 2 mit  $c'=d'=c=d=e$ ).  
Weil andererseits  $h_{\nu}$  aus  $\mathcal{C}_{\lambda_{\nu}} \mathcal{A}_{\nu}$  ist, gibt es ein  $\bar{h}_{\lambda_{\nu}} \in \mathcal{A}_{\lambda_{\nu}}$ , so daß sich  $h_{\nu}$  in der Form  $h_{\nu} = c\bar{h}_{\lambda_{\nu}}d$  darstellen läßt.  $\bar{h}_{\lambda_{\nu}}$  und  $v_{\lambda_{\nu}}^{(i)}$  sind aus  $\mathcal{A}_{\lambda_{\nu}}$ ;  $c\bar{h}_{\lambda_{\nu}}d$  liegt nicht in  $\mathcal{H}_{\varepsilon/3}$ , weil  $h_{\nu} \in \mathcal{A}_{\nu}$  und  $\mathcal{A}_{\nu} \cap \mathcal{H}_{\varepsilon/3} = \emptyset$ .  
Liegt nun  $cv_{\lambda_{\nu}}^{(i)}d$  nicht in  $\mathcal{H}_{\varepsilon/3}$ , so ist also

$$|f(h_{\nu}) - f(cv_{\lambda_{\nu}}^{(i)}d)| = |f(c\bar{h}_{\lambda_{\nu}}d) - f(cv_{\lambda_{\nu}}^{(i)}d)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Gilt jedoch  $cv_{\lambda_{\nu}}^{(i)}d \in \mathcal{H}_{\varepsilon/3}$ , so ergibt sich nur

$$|f(h_{\nu}) - f(cv_{\lambda_{\nu}}^{(i)}d)| \leq 2K.$$

Dieser Fall kann aber nach Wahl der  $v_{\nu}^{(i)}$  lt. Satz 6 höchstens  $nN\delta$ -mal eintreten. Also ergibt sich insgesamt:

$$\left| \frac{1}{m} \sum_{\mu} f(w_{\mu}) - \frac{1}{m} \sum_{\mu} f(cw_{\mu}d) \right| < \frac{1}{nN} (nN \cdot \frac{\varepsilon}{3} + nN \cdot \frac{\varepsilon}{3} + 2K \cdot nN \cdot \delta) = \varepsilon,$$

womit der Mittelwertsatz bewiesen ist.

Der durch  $f(x)$  eindeutig bestimmte Mittelwert ergibt sich als Grenzwert

$$M_X\{f(x)\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{m} \sum_{\mu=1}^m f(w_{\mu})$$

und erfüllt die eingangs genannten Rechengesetze.

Beispiele für  $\omega$ -Funktionen liefern die charakteristischen Funktionen  $\chi(x)$  von Nullmengen; ihr Mittelwert ist null. Auch die fastperiodischen Funktionen hatten wir bereits als  $\omega$ -Funktionen erkannt. Eine umfassendere Klasse von  $\omega$ -Funktionen bilden die  $\omega$ -fastperiodischen Funktionen, denen wir uns nunmehr zuwenden wollen.



## § 2. Die $\omega$ -fastperiodischen Funktionen.

Wir geben sogleich die

Definition 3: Eine komplexwertige und beschränkte Funktion  $f(x)$  auf  $\mathcal{G}$  heißt  $\omega$ -fastperiodisch, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine endliche Anzahl von Teilmengen  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$  von  $\mathcal{G}$  und eine Nullmenge  $\mathcal{N}_\varepsilon \subset \mathcal{G}$  gibt, so daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$1) \mathcal{A}_1 \cup \dots \cup \mathcal{A}_n = \mathcal{G};$$

$$2) \text{ Gilt für gewisse Elemente } x, y, c', d' \text{ und geeignetes } \nu = 1, \dots, n \\ c'xd', c'yd' \in \mathcal{A}_\nu,$$

so folgt für alle  $c, d \in \mathcal{G}$ , für welche

$$cxd, cyd \in \mathcal{G} - \mathcal{N}_\varepsilon$$

erfüllt ist,

$$|f(cxd) - f(cyd)| < \varepsilon.$$

Wiederum heißt das Mengensystem  $\{\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n, \mathcal{N}_\varepsilon\}$  eine Teilung  $\mathcal{T}\{f(x), \varepsilon\}$  zu  $f(x)$  und  $\varepsilon$ , und eine Teilung heißt Minimalteilung, wenn zu  $\varepsilon > 0$  die  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n, \mathcal{N}_\varepsilon$  so gewählt sind, daß  $n$  den kleinstmöglichen Wert hat.

Jede  $\omega$ -fastperiodische Funktion ist eine  $\omega$ -Funktion, also gelten alle im §1 aufgestellten Sätze auch für  $\omega$ -fastperiodische Funktionen; speziell hat demnach jede  $\omega$ -fastperiodische Funktion einen Mittelwert. Andererseits ist jede fastperiodische Funktion auf  $\mathcal{G}$  auch  $\omega$ -fastperiodisch, man braucht nur für jedes  $\varepsilon > 0$  als Nullmenge  $\mathcal{N}_\varepsilon$  die leere Menge zu wählen. Genau wie bei den fastperiodischen Funktionen zeigt man für den Fall, daß  $\mathcal{G}$  eine Gruppe ist, die Äquivalenz unserer Definition mit der üblichen (s. MAAK [7], §2).

Zu jeder  $\omega$ -fastperiodischen Funktion  $f(x)$  kann man ein System von Teilungen finden, welches in gewissem Sinne "ausgezeichnet" ist. Wir betrachten zu der Nullfolge  $\varepsilon_i = 1/i$  eine Folge von Teilungen

$$(1) \quad \mathcal{T}_i\{f(x), \varepsilon_i\} = \{\mathcal{A}_1^{(i)}, \dots, \mathcal{A}_n^{(i)}, \mathcal{N}_i = \mathcal{N}_{\varepsilon_i}\}.$$



Dabei können wir die Folge  $\mathcal{K}_i$  so einrichten, daß sie nicht absteigend ist:

$$(2) \quad \mathcal{K}_i \subseteq \mathcal{K}_{i+1} \quad \text{für alle } i=1,2,\dots$$

Das System  $\{\mathcal{K}_i\}$  bildet dann also einen Mengenkörper. Umgekehrt ist jede Funktion  $f(x)$ , die eine solche Folge von Teilungen (1) mit der zusätzlichen Bedingung (2) besitzt, auch  $\omega$ -fastperiodisch. Wir werden von dieser Tatsache zwar keinen Gebrauch machen, jedoch könnten wir uns bei der Durchführung unserer Theorie darauf beschränken, für eine  $\omega$ -fastperiodische Funktion nur Nullmengen zuzulassen, die aus einem solchen vorgelegten Mengenkörper stammen.

Zur Vereinfachung wollen wir vereinbaren, daß wir, wenn keine Verwechslungen auftreten können, in Zukunft folgende Redeweise gebrauchen:

Liegt (zu  $\varepsilon > 0$ ) ein Mengensystem  $\{a_1, \dots, a_n, \mathcal{K}_\varepsilon\}$  von Teilmengen von  $\mathcal{G}$  vor, so möge das Elementepaar  $(x', y')$  mit  $x', y' \in \mathcal{G} - \mathcal{K}_\varepsilon$  z u l ä s s i g bezüglich  $\{a_1, \dots, a_n, \mathcal{K}_\varepsilon\}$  genannt werden, wenn es gewisse Elemente  $c, d, x, y, c', d'$  sowie ein geeignetes  $\nu$  gibt, so daß erstens  $x' = cxd, y' = cyd$  gilt und zweitens  $c'xd', c'yd'$  in  $\mathcal{A}_\nu$  liegen. In diesem Sinne wollen wir auch kurz sagen, das Elementepaar  $cx d, cy d$  sei zulässig bezüglich  $\{a_1, \dots, a_n, \mathcal{K}_\varepsilon\}$ .

Damit können wir Bedingung 2 der Definition 3 (und der Definition 2) auch so aussprechen: Für jedes bezüglich  $\{a_1, \dots, a_n, \mathcal{K}_\varepsilon\}$  zulässige Elementepaar  $cx d, cy d$  soll stets

$$|f(cxd) - f(cyd)| < \varepsilon$$

gelten.

Es zeigt sich nun, daß viele Sätze über die fastperiodischen Funktionen auch für die  $\omega$ -fastperiodischen Funktionen Gültigkeit haben (vgl. MAAK [5], §7, [8], §1).

Satz 1: Ist  $f(x)$   $\omega$ -fastperiodisch, dann sind auch die Funktionen  $\overline{f(x)}$  (Querstrich bedeutet hier "konjugiert komplex"),  $|f(x)|$ ,  $\gamma f(x)$  (mit komplexem, konstantem  $\gamma$ ) und  $f(\bar{c}x\bar{d})$  (mit beliebigen, aber festen  $\bar{c}, \bar{d} \in \mathcal{G}$ )  $\omega$ -fastperiodisch. Ist zudem  $\mathcal{G}$  eine Gruppe, so ist auch  $f(x^{-1})$   $\omega$ -fastperiodisch.



Beweis: Aus  $|\overline{f(x)} - \overline{f(y)}| = |f(x) - f(y)|$  folgt, daß jede Teilung  $\mathcal{T}\{f(x), \varepsilon\}$  auch eine Teilung  $\mathcal{T}\{\overline{f(x)}, \varepsilon\}$  ist, und wegen

$$||f(x)| - |f(y)|| \leq |f(x) - f(y)|$$

ist jede Teilung  $\mathcal{T}\{f(x), \varepsilon\}$  gleichzeitig eine Teilung  $\mathcal{T}\{|f(x)|, \varepsilon\}$ . Ferner sieht man sofort, daß für  $\gamma \neq 0$  jede Teilung  $\mathcal{T}\{f(x), \frac{\varepsilon}{|\gamma|}\}$  eine Teilung  $\mathcal{T}\{\gamma f(x), \varepsilon\}$  ist; für  $\gamma = 0$  ist die Aussage, daß  $\gamma f(x)$   $\omega$ -fastperiodisch ist, trivial, weil alle Konstanten  $\omega$ -fastperiodisch sind.

Um zu zeigen, daß mit  $f(x)$  auch  $f(\overline{cxd})$   $\omega$ -fastperiodisch ist, geht man von einer beliebigen Teilung  $\mathcal{T}\{f(x), \varepsilon\} = \{a_1, \dots, a_n, \mathcal{N}_\varepsilon\}$  aus und bildet zu  $\mathcal{N}_\varepsilon$  die Menge  $\mathcal{M}_\varepsilon = \{m: \overline{cm\bar{d}} \in \mathcal{N}_\varepsilon\}$ .  $\mathcal{M}_\varepsilon$  ist nach §1, Satz 2 eine Nullmenge.  $\{a_1, \dots, a_n, \mathcal{M}_\varepsilon\}$  bildet dann eine Teilung  $\mathcal{T}\{f(\overline{cxd}), \varepsilon\}$ . Zunächst ist nach Voraussetzung  $\bigcup_{v=1}^n a_v = \mathcal{G}$ . Ist ferner das Elementepaar  $cxd, cyd$  zulässig bezüglich  $\{a_1, \dots, a_n, \mathcal{M}_\varepsilon\}$ , so folgt  $cxd, cyd \notin \mathcal{M}_\varepsilon$ , d. h.  $\overline{cxd\bar{d}}, \overline{cyd\bar{d}} \notin \mathcal{N}_\varepsilon$ , womit sich  $|f(\overline{cxd\bar{d}}) - f(\overline{cyd\bar{d}})| < \varepsilon$  ergibt.

Schließlich haben wir noch zu beweisen, daß, wenn  $\mathcal{G}$  eine Gruppe ist, mit  $f(x)$  auch  $g(x) = f(x^{-1})$   $\omega$ -fastperiodisch ist. Sei zu beliebigem  $\varepsilon > 0$   $\{a_1, \dots, a_n, \mathcal{N}_\varepsilon\}$  eine Teilung  $\mathcal{T}\{f(x), \varepsilon\}$ . Wir bilden die Mengen

$$\mathcal{L}_v = \{b: b^{-1} \in a_v\} \quad (v=1, \dots, n) \text{ und } \mathcal{M}_\varepsilon = \{m: m^{-1} \in \mathcal{N}_\varepsilon\}$$

und behaupten, daß  $\{\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n, \mathcal{M}_\varepsilon\}$  eine Teilung  $\mathcal{T}\{g(x), \varepsilon\}$  ist. Da mit  $b$  auch  $b^{-1}$  die ganze Gruppe durchläuft, ergibt sich sofort

$$\mathcal{L}_1 \cup \dots \cup \mathcal{L}_n = a_1 \cup \dots \cup a_n = \mathcal{G}.$$

Sind  $cxd, cyd$  zulässig bezüglich  $\{\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n, \mathcal{M}_\varepsilon\}$  so ergibt sich, daß

$$\begin{aligned} |g(cxd) - g(cyd)| &= |f((cxd)^{-1}) - f((cyd)^{-1})| \\ &= |f(d^{-1}x^{-1}c^{-1}) - f(d^{-1}y^{-1}c^{-1})| < \varepsilon \end{aligned}$$

ist. Denn aus  $c'xd', c'yd' \in \mathcal{L}_v$  folgt, daß

$$d'^{-1}x^{-1}c'^{-1} = c''x^{-1}d'', \quad d'^{-1}y^{-1}c'^{-1} = c''x^{-1}d'' \in a_v$$

gilt, und aus  $cxd, cyd \notin \mathcal{M}_\varepsilon$  folgt, daß

$$d^{-1}x^{-1}c^{-1}, d^{-1}y^{-1}c^{-1} \notin \mathcal{N}_\varepsilon.$$



Dies besagt, daß das Elementepaar  $d^{-1}x^{-1}c^{-1}$ ,  $d^{-1}y^{-1}c^{-1}$  zulässig bezüglich  $\{a_1, \dots, a_n, \mathcal{N}_\varepsilon\}$  ist, q. e. d..

Satz 2: Sind  $f(x)$  und  $g(x)$   $\omega$ -fastperiodisch, so sind auch  $f(x) + g(x)$  und  $f(x) \cdot g(x)$   $\omega$ -fastperiodisch.  
(Addition und Multiplikation sind elementweise zu verstehen.)

Beweis: a) Um zu zeigen, daß es zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine Teilung  $\mathcal{T}\{f(x)+g(x), \varepsilon\}$  gibt, gehen wir von den Teilungen

$\mathcal{T}\{f(x), \frac{\varepsilon}{2}\} = \{a_1, \dots, a_n, \mathcal{N}_{\varepsilon/2}\}$  und  $\mathcal{T}\{g(x), \frac{\varepsilon}{2}\} = \{\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_m, \mathcal{M}_{\varepsilon/2}\}$  aus und setzen

$$\mathcal{L}_{\nu\mu} = a_\nu \cap \mathcal{L}_\mu \quad (\nu=1, \dots, n; \mu=1, \dots, m), \quad \mathcal{L}_\varepsilon = \mathcal{N}_{\varepsilon/2} \cup \mathcal{M}_{\varepsilon/2}.$$

Wir numerieren die  $\mathcal{L}_{\nu\mu}$  irgendwie durch von 1 bis  $r=mn$ . Wir behaupten, daß  $\{\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_r, \mathcal{L}_\varepsilon\}$  eine Teilung  $\mathcal{T}\{f(x)+g(x), \varepsilon\}$  ist. Zunächst ist

$$\bigcup_{s=1}^r \mathcal{L}_s = \bigcup_{\nu=1}^n \bigcup_{\mu=1}^m (a_\nu \cap \mathcal{L}_\mu) = \bigcup_{\mu=1}^m (\mathcal{A}_\mu \cap \mathcal{L}_\mu) = \mathcal{A}.$$

Sind nun  $cx_d, cy_d$  zulässig bezüglich  $\{\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_r, \mathcal{L}_\varepsilon\}$ , so sind sie es erst recht bezüglich  $\{a_1, \dots, a_n, \mathcal{N}_{\varepsilon/2}\}$  und bezüglich  $\{\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_m, \mathcal{M}_{\varepsilon/2}\}$  und es wird

$$\begin{aligned} & |f(cx_d) + g(cx_d) - f(cy_d) - g(cy_d)| \\ & \leq |f(cx_d) - f(cy_d)| + |g(cx_d) - g(cy_d)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

b) Sei  $K$  eine gemeinsame Schranke für  $f(x)$  und  $g(x)$ :

$$|f(x)| \leq K, \quad |g(x)| \leq K \quad \text{für alle } x \in \mathcal{A}.$$

Zu beliebig vorgegebenem  $\varepsilon > 0$  gehen wir von den Teilungen

$$\mathcal{T}\{f(x), \frac{\varepsilon}{2K}\} = \{a_1, \dots, a_n, \mathcal{N}_{\varepsilon/2K}\} \text{ und } \mathcal{T}\{g(x), \frac{\varepsilon}{2K}\} = \{\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_m, \mathcal{M}_{\varepsilon/2K}\}$$

aus und bilden wie oben die Mengen  $\mathcal{L}_s$  und  $\mathcal{L}_\varepsilon$ . Das System  $\{\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_r, \mathcal{L}_\varepsilon\}$  bildet dann eine Teilung  $\mathcal{T}\{f(x)g(x), \varepsilon\}$ . Wie unter a) folgt, daß  $\mathcal{L}_1 \cup \dots \cup \mathcal{L}_r = \mathcal{A}$  ist. Sind  $cx_d, cy_d$  zulässig bezüglich  $\{\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_r, \mathcal{L}_\varepsilon\}$ , so sind sie es erst recht bezüglich der Systeme  $\{a_1, \dots, a_n, \mathcal{N}_{\varepsilon/2K}\}$  und  $\{\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_m, \mathcal{M}_{\varepsilon/2K}\}$  und es folgt

$$\begin{aligned} & |f(cx_d)g(cx_d) - f(cy_d)g(cy_d)| \\ & \leq |f(cx_d)| \cdot |g(cx_d) - g(cy_d)| + |g(cy_d)| \cdot |f(cx_d) - f(cy_d)| \\ & < K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} + K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} = \varepsilon. \end{aligned}$$



Satz 3: Der Limes  $f(x)$  einer gleichmäßig konvergenten Folge  $\omega$ -fastperiodischer Funktionen  $f_i(x)$

$$f(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} f_i(x)$$

ist wieder  $\omega$ -fastperiodisch.

Beweis: Zu beliebig vorgegebenem  $\varepsilon > 0$  bestimmen wir ein  $i$ , so daß für alle  $x$

$$|f_i(x) - f(x)| < \varepsilon/3$$

wird, was wegen der gleichmäßigen Konvergenz möglich ist. Dann ist jede Teilung  $\mathcal{T}\{f_i(x), \varepsilon/3\}$  eine Teilung zu  $f(x)$  und  $\varepsilon$ . Denn sind  $cxd, cyd$  zulässig, so ergibt sich

$$\begin{aligned} & |f(cxd) - f(cyd)| \\ & \leq |f(cxd) - f_i(cxd)| + |f_i(cxd) - f_i(cyd)| + |f_i(cyd) - f(cyd)| \\ & < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Aus diesen Sätzen entnehmen wir, daß die  $\omega$ -fastperiodischen Funktionen - genau wie die fastperiodischen (s. MAAK [8]) - einen komplexen, bezüglich gleichmäßiger Konvergenz abgeschlossenen linearen Raum bilden; dieser enthält den Raum der fastperiodischen Funktionen als abgeschlossenen Teilraum.

Satz 4: Ist  $f(x)$   $\omega$ -fastperiodisch und  $F(u)$  eine stetige komplexwertige Funktion der komplexen Variablen  $u$ , so ist  $F(f(x))$  eine  $\omega$ -fastperiodische Funktion von  $x$ .

Beweis:  $f(x)$  ist beschränkt:  $|f(x)| \leq K$  für alle  $x \in \mathcal{G}$ . Also ist  $F(f(x))$  beschränkt und wegen der Stetigkeit ist  $F(u)$  gleichmäßig stetig in  $|u| \leq K$ . Dann kann man zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta(\varepsilon) > 0$  so bestimmen, daß aus  $|u-v| < \delta$  folgt  $|F(u)-F(v)| < \varepsilon$ . Zu diesem  $\delta$  gibt es eine Teilung  $\mathcal{T}\{f(x), \delta\}$ , und diese ist eine Teilung  $\mathcal{T}\{F(f(x)), \varepsilon\}$ .

### § 3. Der Zerlegungssatz.

Wir wollen eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür angeben, daß eine auf  $\mathcal{G}$  definierte komplexwertige Funktion  $\omega$ -fastperiodisch ist. Dazu brauchen wir den Begriff "Nullfunktion":



Definition 4: Eine komplexwertige und beschränkte Funktion  $\omega(x)$  auf  $G$  heißt Nullfunktion, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine Nullmenge  $\mathcal{N}_\varepsilon \subset G$  gibt, so daß für alle  $x \in G - \mathcal{N}_\varepsilon$

$$|\omega(x)| < \varepsilon$$

gilt.

Weil die Vereinigung zweier Nullmengen eine Nullmenge ist, sind Summe und Differenz zweier Nullfunktionen wieder Nullfunktionen. Ferner sieht man sofort, daß das Produkt aus einer Nullfunktion und einer beschränkten Funktion ebenfalls eine Nullfunktion ist. Dies werden wir später brauchen. -- Jede Nullfunktion  $\omega(x)$  ist  $\omega$ -fastperiodisch. Denn bestimmt man zu  $\varepsilon > 0$  eine Nullmenge  $\mathcal{N}_{\varepsilon/2}$  derart, daß

$$|\omega(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } x \in G - \mathcal{N}_{\varepsilon/2}$$

gilt, so bildet wegen

$$|\omega(cxd) - \omega(cyd)| \leq |\omega(cxd)| + |\omega(cyd)|$$

$\{G, \mathcal{N}_{\varepsilon/2}\}$  eine Teilung  $\mathcal{H}\{\omega(x), \varepsilon\}$  im Sinne der Definition 3.

Daraus folgern wir

Satz 1: Ist  $f(x)$  als Summe

$$(1) \quad f(x) = \varphi(x) + \omega(x)$$

einer fastperiodischen Funktion  $\varphi(x)$  und einer Nullfunktion  $\omega(x)$  darstellbar, so ist  $f(x)$   $\omega$ -fastperiodisch.

Denn  $f(x)$  ist als Summe zweier  $\omega$ -fastperiodischer Funktionen wieder  $\omega$ -fastperiodisch. (§2, Satz 2).

Wir wollen nun zeigen, daß die Umkehrung von Satz 1 gilt: Jede  $\omega$ -fastperiodische Funktion läßt sich als Summe der Form (1) mit fastperiodischem  $\varphi(x)$  und einer Nullfunktion  $\omega(x)$  darstellen.

Nachdem wir alle Sätze des vorangegangenen Paragraphen ohne Zuhilfenahme des Mittelwertsatzes abgeleitet haben, beruht der Gedankengang, welcher dem Beweis dieser Umkehrung von Satz 1 zugrundeliegt, wesentlich auf der Existenz des Mittelwertes einer  $\omega$ -fastperiodischen Funktion. Die Beweisidee ist etwa folgende: Wäre  $G$  eine Gruppe, so könnte man versuchen, zu  $f(x)$  mit Hilfe geeigneter Funktionen  $g_i(x)$  durch die Faltung

$$(2) \quad \varphi_i(x) = M_x \{f(xy^{-1}) \cdot g_i(y)\}$$



eine Folge  $\varphi_i(x)$  "geglätteter" Funktionen zu konstruieren, die dann fastperiodisch sind und gleichmäßig gegen eine fastperiodische Funktion  $\varphi(x)$  konvergieren. Dann wäre nur noch zu zeigen, daß  $f(x) - \varphi(x)$  eine Nullfunktion  $\omega(x)$  ist und der Beweis wäre geführt. Bei Halbgruppen jedoch haben wir kein inverses Element zur Verfügung. Im Falle der fastperiodischen Funktionen kann man trotzdem eine Faltung erklären (s. MAAK [8], §3), indem man zu  $f(x)$  eine "Hilfsfunktion"  $f(x,y)$  einführt, welche formal all die Eigenschaften von  $f(xy^{-1})$  hat, die man benötigt, um mit der Faltung rechnen zu können. Bei  $\omega$ -fastperiodischen Funktionen aber gelingt die Konstruktion einer solchen Hilfsfunktion (mit den notwendigen Eigenschaften) nicht. Man kann jedoch, ausgehend von  $f(x)$ , eine der Faltung ähnliche Operation durchführen, indem man in (2)  $f(xy^{-1})$  durch  $f(xy)$  ersetzt. Dies genügt bereits voll- auf zur "Glättung" der Funktion  $f(x)$ , und durch passende Wahl der  $g_i(x)$  gelangt man dann zu einer fastperiodischen Funktion  $\varphi(x)$ , die zur Aufstellung von (1) verwendet werden kann.

Es sei im folgenden  $f(x)$  eine beliebige  $\omega$ -fastperiodische Funktion und es sei  $K$  eine Schranke von  $f(x)$ :

$$\sup_{x \in G} |f(x)| = K.$$

Um die genannten  $g_i(x)$  erklären zu können, führen wir die "Distanz"  $\Delta(x,y)$  zweier Halbgruppenelemente  $x$  und  $y$  bezüglich  $f(x)$  durch die Festsetzung

(3)  $\Delta(x,y) = M_c \{ |f(cx) - f(cy)| \}$   
 ein (vgl. MAAK [5], §15). Der rechts stehende Mittelwert existiert, weil nach §2, Satz 1 und Satz 2, mit  $f(c)$  auch  $f(cx)$ ,  $f(cy)$  und  $f(cx) - f(cy)$   $\omega$ -fastperiodisch in  $c$  sind und der Betrag einer  $\omega$ -fastperiodischen Funktion ebenfalls  $\omega$ -fastperiodisch ist. Man sieht sofort, daß  $\Delta(x,y)$  stets nichtnegativ ist und die Eigenschaften

$$\Delta(x,x) = 0, \quad \Delta(x,y) = \Delta(y,x),$$

sowie

$$\Delta(x,z) = \Delta(x,y) + \Delta(y,z)$$

hat. Hingegen folgt aus  $\Delta(x,y) = 0$  nicht notwendig, daß  $x=y$  ist.



Wir betrachten die Menge  $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$  aller Paare  $(x, y)$  mit  $x \in \mathcal{G}$ ,  $y \in \mathcal{G}$ . Durch die Verknüpfungsvorschrift  $(x, y)(x', y') = (xx', yy')$  wird sie zu einer Halbgruppe mit dem neutralen Element  $(e, e)$ .

Wir zeigen nun

Satz 2:  $\Delta(x, y)$  ist fastperiodisch auf  $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ .

Beweis: Zu vorgegebenem  $\varepsilon > 0$  gehen wir von einer Teilung

$\mathcal{T}\{f(x), \varepsilon/2\} = \{a_1, \dots, a_n, \mathcal{K}_{\frac{\varepsilon}{2}}\}$  aus und bilden die Mengen

$$a_{\nu\mu}^* = a_\nu \times a_\mu \quad (\nu, \mu = 1, \dots, n).$$

Wir numerieren die  $n^2$  Mengen  $a_{\nu\mu}^*$  irgendwie von 1 bis  $r = n^2$  durch und behaupten, daß  $\{a_1^*, \dots, a_r^*\}$  eine Teilung  $\mathcal{T}\{\Delta(x, y), \varepsilon\}$  ist.

Zuerst folgt

$$\bigcup_{\nu, \mu=1}^r a_\nu \times a_\mu = \mathcal{G} \times \mathcal{G}.$$

Sind nun  $(c_1, c_2)(x_1, y_1)(d_1, d_2)$  und  $(c_1, c_2)(x_2, y_2)(d_1, d_2)$  zulässig bezüglich  $\{a_1^*, \dots, a_r^*\}$ , so haben wir zu zeigen, daß

$$|\Delta(c_1 x_1 d_1, c_2 y_1 d_2) - \Delta(c_1 x_2 d_1, c_2 y_2 d_2)| < \varepsilon$$

wird. Unter Berücksichtigung der Rechenregeln für den Mittelwert können wir folgendermaßen abschätzen:

$$\begin{aligned} & |\Delta(c_1 x_1 d_1, c_2 y_1 d_2) - \Delta(c_1 x_2 d_1, c_2 y_2 d_2)| \\ &= |M_c\{|f(cc_1 x_1 d_1) - f(cc_2 y_1 d_2)|\} - M_c\{|f(cc_1 x_2 d_1) - f(cc_2 y_2 d_2)|\}| \\ &\leq M_c\{|f(cc_1 x_1 d_1) - f(cc_2 y_1 d_2) - f(cc_1 x_2 d_1) + f(cc_2 y_2 d_2)|\} \\ &\leq M_c\{|f(cc_1 x_1 d_1) - f(cc_1 x_2 d_1)|\} + M_c\{|f(cc_2 y_1 d_2) - f(cc_2 y_2 d_2)|\}. \end{aligned}$$

Ist  $cc_1 x_1 d_1, cc_1 x_2 d_1$  zulässig bezüglich  $\{a_1, \dots, a_n, \mathcal{K}_{\frac{\varepsilon}{2}}\}$ , dann ist  $|f(cc_1 x_1 d_1) - f(cc_1 x_2 d_1)| < \frac{\varepsilon}{2}$ , im anderen Fall kann man nur  $\leq 2K$  schließen, und das Entsprechende gilt für den zweiten Summanden. Ist  $\mathcal{X}(x)$  die charakteristische Funktion von  $\mathcal{K}_{\frac{\varepsilon}{2}}$ , so können wir weiter schließen:

$$\begin{aligned} & \dots < M_c\left\{\frac{\varepsilon}{2} + 2K \cdot \mathcal{X}(cc_1 x_1 d_1) + 2K \cdot \mathcal{X}(cc_1 x_2 d_1)\right\} + \\ & \quad + M_c\left\{\frac{\varepsilon}{2} + 2K \cdot \mathcal{X}(cc_2 y_1 d_2) + 2K \cdot \mathcal{X}(cc_2 y_2 d_2)\right\} = \varepsilon, \end{aligned}$$

weil (für jedes  $d \in \mathcal{G}$ )  $M_c\{\mathcal{X}(cd)\} = M_c\{\mathcal{X}(c)\} = 0$  gilt, q. e. d..



Wir erklären jetzt für die positive reelle Variable  $u$  die Funktion

$$F_i(u) = \begin{cases} 1 - iu & \text{für } u < 1/i \\ 0 & \text{für } u \geq 1/i \end{cases} \quad (i=1,2,3,\dots).$$

Die Funktion  $F_i(\Delta(x,e))$  ( $e \in \mathcal{G}$  war das neutrale Element) ist fastperiodisch in  $x$ , weil  $\Delta'(x,e)$  fastperiodisch und  $F_i(u)$  beschränkt ist. Also existiert  $M_x\{F_i(\Delta(x,e))\}$  und ist von null verschieden, denn  $F_i(\Delta(x,e))$  ist fastperiodisch, nichtnegativ und verschwindet nicht identisch. Somit ist

$$g_i(x) = \frac{F_i(\Delta(x,e))}{M_x\{F_i(\Delta(x,e))\}} \quad (i=1,2,3,\dots)$$

eine nichtnegative fastperiodische Funktion auf  $\mathcal{G}$ . Grob ausgedrückt ist  $g_i(x)$  groß, wenn  $x$  nahe bei  $e$  liegt (im Sinne unserer Distanz  $\Delta$ ), und  $=0$ , wenn dies nicht der Fall ist.

Die Funktion  $g_i(x)$  nehmen wir nun und "glätten" damit unsere  $\omega$ -fastperiodische Funktion  $f(x)$ . Wir setzen:

$$\varphi_i(x) = M_y\{f(xy) \cdot g_i(y)\}.$$

Es gilt

Satz 3: Die Menge  $\{\varphi_i(x)\}$  ( $i=1,2,3,\dots$ ) ist gleichgradig beschränkt und gleichgradig fastperiodisch.

Letzteres besagt, daß zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine Überdeckung  $\{\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n\}$  von  $\mathcal{G}$  existiert, die für alle  $\varphi_i(x)$  eine Teilung  $\mathcal{T}\{\varphi_i(x), \varepsilon\}$  ist.

Beweis:  $f(x)$  liefert die allen  $\varphi_i(x)$  gemeinsame Schranke:

$$|\varphi_i(x)| \leq M_y\{|f(cy)| g_i(y)\} \leq K \cdot M_y\{g_i(y)\} = K.$$

Sei nun zu beliebigem  $\varepsilon > 0$   $\{\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n, \mathcal{N}_\varepsilon\}$  eine Teilung zu  $f(x)$  und  $\varepsilon$ . Wir wollen zeigen, daß  $\{\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n\}$  für jedes  $i$  eine Teilung zu  $\varphi_i(x)$  und  $\varepsilon$  ist. Sind  $x, z, c', d'$  so beschaffen, daß  $c'xd', c'zd' \in \mathcal{A}_\nu$  gilt, dann haben wir nachzuweisen, daß für jedes  $i$

$$|\varphi_i(cxd) - \varphi_i(czd)| < \varepsilon \quad \text{für alle } c, d \in \mathcal{G}$$

gilt. Es wird



$$|\varphi_i(cxd) - \varphi_i(czd)| = |M_y\{[f(cxdy) - f(czdy)] \cdot g_i(y)\}| \\ \leq M_y\{|f(cxdy) - f(czdy)| g_i(y)\}.$$

Liegen nun  $cxdy, czdy$  nicht in  $\mathcal{H}_\varepsilon$ , so wird  $|f(cxdy) - f(czdy)| < \varepsilon$ , andernfalls können wir nur  $\leq 2K$  folgern. Ist  $\chi(x)$  die charakteristische Funktion von  $\mathcal{H}_\varepsilon$ , so können wir weiter abschätzen:

$$|\varphi_i(cxd) - \varphi_i(czd)| < M_y\{[\varepsilon + 2K \cdot \chi(cxdy) + 2K \cdot \chi(czdy)] \cdot g_i(y)\}.$$

Wenn wir jetzt zeigen können, daß für beliebige  $\bar{c}, \bar{d} \in \mathcal{G}$  stets

$$(4) \quad M_y\{\chi(cy\bar{d})g_i(y)\} = 0$$

gilt, so ergibt sich, indem wir  $\bar{d}=e$  und  $\bar{c}=cxd$  bzw.  $\bar{c}=czd$  setzen, unsere behauptete Ungleichung

$$|\varphi_i(cxd) - \varphi_i(czd)| < \varepsilon \cdot M_y\{g_i(y)\} = \varepsilon.$$

Zum Nachweis der Gleichung (4) beachten wir, daß  $\chi(y)$   $\omega$ -fast-periodisch, also ergodisch ist und  $M_y\{\chi(y)\} = M_y\{\chi(\bar{c}y\bar{d})\} = 0$  für beliebige  $\bar{c}, \bar{d} \in \mathcal{G}$  gilt.  $\chi(\bar{c}y\bar{d})$  ist ebenfalls  $\omega$ -fastperiodisch und damit auch  $\chi(\bar{c}y\bar{d})g_i(y)$  (§2, Satz 1 und Satz 2). Somit existiert  $M_y\{\chi(\bar{c}y\bar{d})g_i(y)\}$ . Weil aber  $g_i(y)$  als fastperiodische Funktion beschränkt ist:  $|g_i(y)| \leq K_i$  für alle  $y \in \mathcal{G}$ , gilt

$$M_y\{\chi(\bar{c}y\bar{d})g_i(y)\} \leq K_i \cdot M_y\{\chi(\bar{c}y\bar{d})\} = 0,$$

womit (4) gezeigt ist, q. e. d..

Aus Satz 3 ergibt sich sogleich

Satz 4: Die Folge  $\varphi_i(x)$  ( $i=1,2,3,\dots$ ) besitzt eine gleichmäßig konvergente Teilfolge  $\varphi_{i_j}(x)$ .

Für den Beweis verweisen wir auf MAAK [5], Seite 137, wo gezeigt wird, daß eine Folge gleichgradig beschränkter und gleichgradig fastperiodischer Funktionen eine gleichmäßig konvergente Teilfolge besitzt; dieser Beweis läßt sich wörtlich auf Halbgruppen übertragen. Den Limes der Teilfolge bezeichnen wir mit

$$\varphi(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_{i_j}(x).$$

$\varphi(x)$  ist wiederum fastperiodisch. Wir wollen nun zeigen, daß

$$\omega(x) = f(x) - \varphi(x)$$

eine Nullfunktion ist. Dazu brauchen wir

Satz 5: Es gilt  $M_x\{|f(x) - \varphi_i(x)|\} < \frac{2}{i}$  ( $i=1,2,3,\dots$ ).



Beweis: Gleichwertig mit der Satzaussage ist die Behauptung, daß es (zu jedem  $i$ ) eine Nullmenge  $\mathcal{N}_i$  gibt, so daß

$$|f(x) - \varphi_i(x)| < \frac{2}{i} \quad \text{für alle } x \in \mathcal{G} - \mathcal{N}_i$$

gilt. Es ist

$$(5) \quad \begin{aligned} |f(x) - \varphi_i(x)| &= |f(x) - M_y\{f(xy)g_i(y)\}| \\ &= |M_y\{[f(x) - f(xy)] \cdot g_i(y)\}| \leq M_y\{|f(x) - f(xy)| \cdot g_i(y)\}. \end{aligned}$$

Wir zeigen, daß der letzte Ausdruck kleiner als  $\frac{2}{i}$  wird. Es ist nach (3)

$$M_x\{|f(x) - f(xy)|\} = \Delta(y, e),$$

$$\text{d. h.} \quad M_x\{|f(x) - f(xy)| - \Delta(y, e)\} = 0.$$

Also gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine Nullmenge  $\mathcal{N}_\varepsilon$ , so daß

$$||f(x) - f(xy)| - \Delta(y, e)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in \mathcal{G} - \mathcal{N}_\varepsilon.$$

Setzen wir  $\varepsilon = 1/i$  und das zugehörige  $\mathcal{N}_\varepsilon = \mathcal{N}_i$ , so können wir weiter schließen:

$$0 \leq |f(x) - f(xy)| < \Delta(y, e) + \frac{1}{i} \quad \text{für alle } x \in \mathcal{G} - \mathcal{N}_i.$$

Weil  $g_i(x) \geq 0$  ist, folgt

$$0 \leq |f(x) - f(xy)| \cdot g_i(y) \leq \Delta(y, e)g_i(y) + \frac{1}{i}g_i(y) \quad (x \in \mathcal{G} - \mathcal{N}_i).$$

Da hier von jedem Ausdruck der Mittelwert über  $y$  existiert, gilt für alle  $x \in \mathcal{G} - \mathcal{N}_i$

$$0 \leq M_y\{|f(x) - f(xy)| \cdot g_i(y)\} \leq M_y\{\Delta(y, e)g_i(y)\} + \frac{1}{i}M_y\{g_i(y)\}.$$

Es ist  $M_y\{g_i(y)\} = 1$ . Ferner ist  $M_y\{\Delta(y, e)g_i(y)\} < \frac{1}{i}M_y\{g_i(y)\}$ ,

denn die Funktion  $g_i(y)$  war so eingerichtet, daß sie verschwindet, wenn  $\Delta(y, e) \geq \frac{1}{i}$  ist. Somit ist für alle  $x \in \mathcal{G} - \mathcal{N}_i$

$$M_y\{|f(x) - f(xy)| \cdot g_i(y)\} < \frac{1}{i} + \frac{1}{i} = \frac{2}{i},$$

woraus sich nach (5)

$$M_x\{|f(x) - \varphi_i(x)|\} < \frac{2}{i}$$

ergibt. ---

Nunmehr folgt sofort

Satz 6: Es ist  $M_x\{|f(x) - \varphi(x)|\} = 0$ .

Beweis: Zu  $\varepsilon > 0$  bestimmen wir ein  $j$  derart, daß



- a)  $M_x\{|f(x) - \varphi_{i_j}(x)|\} < \frac{\varepsilon}{2}$  (möglich nach Satz 5),  
 b)  $|\varphi_{i_j}(x) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$  für alle  $x \in \mathcal{G}$  (gleichmäßige Konvergenz der  $\varphi_{i_j}(x)$ )

wird. Dann folgt

$$\begin{aligned} M_x\{|f(x) - \varphi(x)|\} &\leq M_x\{|f(x) - \varphi_{i_j}(x)|\} + M_x\{|\varphi_{i_j}(x) - \varphi(x)|\} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot M(1) = \varepsilon, \quad \text{q. e. d.} \end{aligned}$$

Wir hatten  $\omega(x) = f(x) - \varphi(x)$  gesetzt. Satz 6 besagt, daß es zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine Nullmenge  $\mathcal{N}_\varepsilon$  gibt, so daß

$$|\omega(x)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in \mathcal{G} - \mathcal{N}_\varepsilon$$

gilt, d. h.  $\omega(x)$  ist Nullfunktion. Damit ist die Umkehrung von Satz 1 bewiesen und wir können zusammenfassend sagen:

Satz 7 (Zerlegungssatz): Eine Funktion  $f(x)$  auf  $\mathcal{G}$  ist dann und nur dann eine  $\omega$ -fastperiodische Funktion, wenn sie sich in der Form

(1)  $f(x) = \varphi(x) + \omega(x)$   
 darstellen läßt, wobei  $\varphi(x)$  fastperiodisch und  $\omega(x)$  Nullfunktion ist.

Schließlich wollen wir noch zeigen, daß die Zerlegung (1) eindeutig ist. Dazu brauchen wir den

Hilfssatz: Ist  $\phi(x)$  eine fastperiodische Nullfunktion, so gilt  $\phi(x) \equiv 0$ .

Beweis: Zu beliebigem  $\varepsilon > 0$  gibt es eine Nullmenge  $\mathcal{N}_\varepsilon$ , so daß  $|\phi(y)| < \varepsilon$  für alle  $y \in \mathcal{G} - \mathcal{N}_\varepsilon$  gilt. Ferner existiert eine Minimalteilung  $\mathcal{Z}\{\phi(x), \varepsilon\} = \{\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_n\}$ . Ist  $x$  ein beliebiges Element aus  $\mathcal{G}$ , so suchen wir ein  $\nu$  mit  $x \in \mathcal{O}_\nu$ . Wegen der Minimalität von  $\mathcal{Z}\{\phi(x), \varepsilon\}$  ist  $\mathcal{O}_\nu \cap \mathcal{G} - \mathcal{N}_\varepsilon \neq \emptyset$ . Wählt man irgendein  $y \in \mathcal{O}_\nu \cap \mathcal{G} - \mathcal{N}_\varepsilon$ , so folgt  $x, y \in \mathcal{O}_\nu$  und  $|\phi(y)| < \varepsilon$ . Damit ist

$$|\phi(x)| \leq |\phi(x) - \phi(y)| + |\phi(y)| < 2\varepsilon.$$

Weil  $\varepsilon > 0$  und  $x \in \mathcal{G}$  beliebig waren, ergibt sich die Behauptung.

Satz 8 (Eindeutigkeitssatz): Die zu einer  $\omega$ -fastperiodischen Funktion  $f(x)$  gehörige Zerlegung

$$f(x) = \varphi(x) + \omega(x)$$

ist eindeutig bestimmt.



Beweis: Wir nehmen an, es gäbe noch eine weitere Zerlegung

$$f(x) = \varphi'(x) + \omega'(x)$$

mit fastperiodischem  $\varphi'(x)$  und einer Nullfunktion  $\omega'(x)$ . Durch Subtraktion folgt

$$0 = \varphi(x) + \omega(x) - \varphi'(x) - \omega'(x).$$

Als Differenz zweier Nullfunktionen ist  $\omega(x) - \omega'(x)$  wieder eine Nullfunktion. Somit ist die fastperiodische Funktion

$\phi(x) = \varphi'(x) - \varphi(x)$  auch eine Nullfunktion, muß daher nach unserem Hilfssatz identisch verschwinden. Also ist  $\varphi(x) = \varphi'(x)$ , was  $\omega(x) = \omega'(x)$  zur Folge hat, q. e. d..

Die durch  $f(x)$  eindeutig bestimmte fastperiodische Funktion  $\varphi(x)$  in (1) wollen wir den "fastperiodischen Anteil" von  $f(x)$  nennen.

#### § 4. Folgerungen aus dem Zerlegungssatz.

Liegt eine unitäre Darstellung der Halbgruppe  $\mathcal{H}$  vor, so sind die Koeffizienten  $D_{g\sigma}(x)$  der Matrizen  $D(x)$  der Darstellung bekanntlich fastperiodische Funktionen von  $x$ . Daher kann man die Theorie der Fourierreihen fastperiodischer Funktionen, wie sie auf Gruppen besteht, auch auf Halbgruppen übertragen (s. MAAK [8] §1, §5). Jeder fastperiodischen Funktion  $\varphi(x)$  kann man eine Fourierreihe

$$(1) \quad \varphi(x) \sim \sum_{\nu} s^{(\nu)} \sum_{g, \sigma} \alpha_{g\sigma}^{(\nu)} D_{g\sigma}^{(\nu)}(x)$$

zuordnen und diese bestimmt die Funktion eindeutig. Die  $D_{g\sigma}^{(\nu)}(x)$  sind dabei die Koeffizienten eines vollständigen Systems  $D^{(\nu)}(x)$  inäquivalenter irreduzibler unitärer Darstellungen der Halbgruppe  $\mathcal{H}$ .  $s^{(\nu)}$  ist der Grad der betreffenden Darstellung und die Matrizen  $A^{(\nu)} = \{\alpha_{g\sigma}^{(\nu)}\}$  heißen die Fouriermatrizen von  $\varphi(x)$ , sie bestimmen sich gemäß

$$(2) \quad \alpha_{g\sigma}^{(\nu)} = M_x \{ \varphi(x) \overline{D_{g\sigma}^{(\nu)}(x)} \}.$$



Ist nunmehr eine  $\omega$ -fastperiodische Funktion  $f(x)$  gegeben, so folgt aus dem Zerlegungssatz, daß

$$M_X\{f(x)\} = M_X\{\varphi(x)\} + M_X\{\omega(x)\} = M_X\{\varphi(x)\}$$

gilt. Bilden wir dann, mit obigen Bezeichnungen,

$$f(x) \cdot \overline{D_{\sigma}^{(\nu)}(x)} = \varphi(x) \cdot \overline{D_{\sigma}^{(\nu)}(x)} + \omega(x) \cdot \overline{D_{\sigma}^{(\nu)}(x)}$$

und schreiben zur Abkürzung statt dessen

$$(3) \quad F_{\sigma}^{(\nu)}(x) = \phi_{\sigma}^{(\nu)}(x) + \Omega_{\sigma}^{(\nu)}(x),$$

so ist  $\phi_{\sigma}^{(\nu)}(x)$  als Produkt zweier fastperiodischer Funktionen wieder fastperiodisch, und ebenso ist nach §2, Satz 2  $F_{\sigma}^{(\nu)}(x)$   $\omega$ -fastperiodisch. Ferner wissen wir, daß das Produkt einer Nullfunktion mit einer beschränkten Funktion wiederum eine Nullfunktion ist. Also ist (3) die Zerlegung von  $F_{\sigma}^{(\nu)}(x)$ , und  $\phi_{\sigma}^{(\nu)}(x)$  und  $\Omega_{\sigma}^{(\nu)}(x)$  sind durch  $f(x)$  und  $D_{\sigma}^{(\nu)}(x)$  eindeutig bestimmt. Weil aber

$$M_X\{F_{\sigma}^{(\nu)}(x)\} = M_X\{\phi_{\sigma}^{(\nu)}(x)\} = M_X\{\varphi(x) \overline{D_{\sigma}^{(\nu)}(x)}\}$$

ist, können wir der  $\omega$ -fastperiodischen Funktion  $f(x)$  eine Fourierreihe zuordnen:

$$(4) \quad f(x) \approx \sum_{\nu} s^{(\nu)} \sum_{\sigma} \alpha_{\sigma}^{(\nu)} D_{\sigma}^{(\nu)}(x),$$

wobei die Fourierkoeffizienten  $\alpha_{\sigma}^{(\nu)}$  diejenigen sind, die sich gemäß (2) aus der in der Zerlegung von  $f(x)$  auftretenden fastperiodischen Funktion  $\varphi(x)$  berechnen. Also ist der  $\omega$ -fastperiodischen Funktion  $f(x)$  und ihrer zugehörigen fastperiodischen Funktion  $\varphi(x)$  dieselbe Fourierreihe zugeordnet, und diese wird durch  $f(x)$  eindeutig bestimmt. Umgekehrt jedoch ist die  $\omega$ -fastperiodische Funktion  $f(x)$  durch die Fourierreihe nicht eindeutig festgelegt, sondern nur deren fastperiodischer Anteil; alle  $\omega$ -fastperiodischen Funktionen mit dem gleichen fastperiodischen Anteil  $\varphi(x)$  haben dieselbe Fourierreihe. Diese Tatsache soll durch die Doppellinie  $\approx$  in (4) ausgedrückt werden. --- Zusammenfassend haben wir den



Satz 1: Jede  $\omega$ -fastperiodische Funktion  $f(x)$  auf  $\mathcal{G}$  hat eine Fourierreihe. Diese ist durch  $f(x)$  eindeutig bestimmt, sie ist nämlich gleich der Fourierreihe ihres fastperiodischen Anteils  $\varphi(x)$ . Umgekehrt ist  $f(x)$  durch seine Fourierreihe nicht eindeutig festgelegt, sondern nur der fastperiodische Anteil; d. h.  $f(x)$  wird nur "bis auf eine additive Nullfunktion" eindeutig bestimmt. Wir schreiben

$$f(x) \approx \sum_{\nu} s^{(\nu)} \sum_{g, \sigma} \alpha_{g\sigma}^{(\nu)} D_{g\sigma}^{(\nu)}(x)$$

mit

$$\alpha_{g\sigma}^{(\nu)} = M_x \left\{ f(x) \overline{D_{g\sigma}^{(\nu)}(x)} \right\}.$$



## II. Asymptotisch fastperiodische Funktionen

### auf abelschen Halbgruppen.

An die eingangs Kapitel I eingeführte Halbgruppe  $\mathcal{G}$  stellen wir jetzt noch die Forderung:  $\mathcal{G}$  sei kommutativ, d. h. für je zwei beliebige Elemente  $a$  und  $b$  aus  $\mathcal{G}$  gelte stets  $ab=ba$ .

#### § 5. Definition der $\alpha$ -fastperiodischen Funktionen.

Von FRÉCHET [3] wurde für den Fall der additiven Halbgruppe der nichtnegativen reellen Zahlen der Begriff "asymptotisch fastperiodisch" eingeführt. Wir übertragen ihn auf beliebige abelsche Halbgruppen, benutzen aber weiterhin die multiplikative Schreibweise der Verknüpfung in  $\mathcal{G}$ .

Definition 1: Eine komplexwertige und beschränkte Funktion  $f(x)$  auf der abelschen Halbgruppe  $\mathcal{G}$  heißt asymptotisch fastperiodisch, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine endliche Anzahl von Teilmengen  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  von  $\mathcal{G}$  und ein Element  $a \in \mathcal{G}$  gibt, so daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$1) \alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_n = \mathcal{G};$$

$$2) \text{ Gilt für gewisse Elemente } x, y, c' \text{ und geeignetes } v=1, \dots, n \\ c'x, c'y \in \alpha_v,$$

so folgt für alle  $c \in \mathcal{G}$

$$|f(cax) - f(cay)| < \varepsilon.$$

Wir nennen das System  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n, a\}$  eine Teilung  $\mathcal{T}\{f(x), \varepsilon\}$ . Eine Teilung  $\mathcal{T}\{f(x), \varepsilon\}$  heißt Minimalteilung, wenn zu  $\varepsilon > 0$  die  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  und  $a$  so gewählt sind, daß  $n$  den kleinstmöglichen Wert hat.

Zur Abkürzung wollen wir - in Analogie zum ersten Abschnitt - anstelle von "asymptotisch fastperiodisch" auch  $\alpha$ -fastperiodisch schreiben; das  $\alpha$  soll an "asymptotisch" erinnern.



Jede auf  $G$  fastperiodische Funktion ist  $\alpha$ -fastperiodisch: Man setze für jedes  $\varepsilon > 0$   $a = e$ . Weiterhin gilt

Satz 1: Jede  $\alpha$ -fastperiodische Funktion  $f(x)$  ist  $\omega$ -fastperiodisch.

Beweis: Zu  $\varepsilon > 0$  gehen wir von einer Teilung  $\{a_1, \dots, a_n, a\}$  zu  $f(x)$  und  $\varepsilon$  aus. Setzen wir  $\mathcal{N}_\varepsilon = G - aG$ , so bildet  $\{a_1, \dots, a_n, \mathcal{N}_\varepsilon\}$  eine Teilung im Sinne " $\omega$ -fastperiodisch" zu  $f(x)$  und  $\varepsilon$ . Weil nämlich  $G$  abelsch ist, ist  $G - aG$  eine Nullmenge (s. MAAK [7], §3), und  $cax = acx$ ,  $cay = acy$  liegen für jedes  $c \in G$  in  $G - \mathcal{N}_\varepsilon = aG$ .

Die  $\alpha$ -fastperiodischen Funktionen sind also solche  $\omega$ -fastperiodische Funktionen, bei denen als Nullmengen  $\mathcal{N}_\varepsilon$  nur "Anfangsabschnitte"  $G - aG$  der Halbgruppe  $G$  zugelassen sind. Demnach gelten alle Sätze von Abschnitt I für  $\alpha$ -fastperiodische Funktionen. Insbesondere könnten wir wie dort vorgehen und mit Hilfe des Mittelwertsatzes einen Zerlegungssatz beweisen, bei welchem die auftretende Nullfunktion  $\omega(x)$  von spezieller Art sein wird: Sie wird höchstens auf einem Anfangsabschnitt  $G - aG$  wesentlich von null verschieden sein. Wir wollen jedoch einen anderen Weg einschlagen und den Zerlegungssatz für  $\alpha$ -fastperiodische Funktionen ohne Zuhilfenahme der Existenz des Mittelwertes herleiten. Dabei werden wir wesentlich benutzen, daß unsere Halbgruppe abelsch ist.

Die Frage, wie man die Definition von  $\alpha$ -fastperiodisch auf einer beliebigen Halbgruppe fassen muß, damit der Zerlegungssatz erhalten bleibt, sowie die Frage, ob sich der eben genannte Beweis dieses Satzes dann auch auf nichtabelsche Halbgruppen übertragen läßt, wollen wir erst später untersuchen. Es wird sich herausstellen, daß diese Beweismethode im nichtabelschen Falle nicht zu dem gewünschten Ergebnis führt. Dies liegt darin begründet, daß die Anfangsabschnitte  $G - aG$  einer beliebigen Halbgruppe im allgemeinen keine Nullmengen sind (s. Bemerkung am Schlusse von §7).

Im §2 haben wir einige Eigenschaften der  $\omega$ -fastperiodischen Funktionen ohne Zuhilfenahme des Mittelwertsatzes direkt aus der Definition hergeleitet. Die entsprechenden Sätze gelten auch



für  $\alpha$ -fastperiodische Funktionen; die Beweise laufen ganz analog wie im §2, man hat dort die beliebigen Nullmengen nur durch die speziellen  $\mathcal{G}$ -a $\mathcal{G}$  zu ersetzen. Daher geben wir hier lediglich die Resultate an:

Satz 2: Ist  $f(x)$   $\alpha$ -fastperiodisch, so sind auch die Funktionen  $\overline{f(x)}$ ,  $|f(x)|$ ,  $\gamma f(x)$  (mit beliebigem komplexen  $\gamma$ ) und  $f(\bar{c}x)$  (mit beliebigem, aber festem  $\bar{c} \in \mathcal{G}$ )  $\alpha$ -fastperiodisch.

Satz 3: Sind  $f(x)$  und  $g(x)$   $\alpha$ -fastperiodisch, so sind auch  $f(x) + g(x)$  und  $f(x) \cdot g(x)$   $\alpha$ -fastperiodisch.

Satz 4: Der Limes  $f(x)$  einer gleichmäßig konvergenten Folge  $\alpha$ -fastperiodischer Funktionen  $f_i(x)$  ist wieder  $\alpha$ -fastperiodisch.

Satz 5: Ist  $f(x)$   $\alpha$ -fastperiodisch und ist  $F(u)$  eine stetige komplexwertige Funktion der komplexen Variablen  $u$ , so ist  $F(f(x))$  eine  $\alpha$ -fastperiodische Funktion von  $x$ .

Wir brauchen schließlich noch einige Eigenschaften von Minimalteilungen. Fast genau so wie den Satz 5 aus §1 beweist man sein Analogon:

Satz 6: Sei  $f(x)$  eine  $\alpha$ -fastperiodische Funktion und  $\varepsilon > 0$  sei beliebig vorgegeben. Ferner sei  $\{a_1, \dots, a_n, a\}$  eine Minimalteilung zu  $f(x)$  und  $\varepsilon$ . Dann gibt es zu jedem Element  $\bar{c} \in \mathcal{G}$  eine Permutation  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  der Zahlen  $1, \dots, n$  und  $n$  Halbgruppenelemente  $h_1, \dots, h_n$ , so daß für alle  $\nu = 1, \dots, n$

$$h_\nu \in a_\nu \cap \bar{c} a_{\lambda_\nu}$$

gilt.

Die Tatsache, daß man bei einer zu einer monotonen Nullfolge  $\varepsilon_i$  gehörigen Folge von Teilungen die Nullmengen  $\mathcal{G}$ -a $\mathcal{G}$  stets so wählen kann, daß sie eine nichtabsteigende Mengenfolge bilden, drückt der folgende Satz aus:

Satz 7: Seien  $f(x)$   $\alpha$ -fastperiodisch und  $\varepsilon_i$  eine monotone Nullfolge positiver Zahlen ( $i=1,2,3,\dots$ ). Ferner sei  $\mathcal{Z}_i^* \{f(x), \varepsilon_i\} = \{a_1^{(i)}, \dots, a_{n_i}^{(i)}, a_i^*\}$  eine zugehörige Folge von Minimalteilungen. Dann lassen sich die  $a_i^*$  so in  $a_i$  abändern, daß  $\{a_1^{(i)}, \dots, a_{n_i}^{(i)}, a_i\} = \mathcal{Z}_i \{f(x), \varepsilon_i\}$  Minimalteilungen sind und

$$a_{i+1} \in a_i \mathcal{G} \quad \text{für alle } i=1,2,3,\dots$$

gilt.



Auf den sehr einfachen Beweis dieses Satzes wollen wir verzichten.

Wir werden nun eine Eigenschaft gewisser Folgen  $\alpha$ -fastperiodischer Funktionen herleiten und daraus dann den Zerlegungssatz folgern.

# § 6. Eine Eigenschaft von Folgen $\alpha$ -fastperiodischer Funktionen.

Wir geben eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, daß eine beschränkte komplexwertige Funktion auf der abelschen Halbgruppe  $\mathcal{G}$   $\alpha$ -fastperiodisch ist (vgl. FRÉCHET [3], Seite 348, Definition III). Zunächst beweisen wir

Satz 1: Es sei  $f(x)$  eine beschränkte komplexwertige Funktion auf  $\mathcal{G}$ .  $b_i$  ( $i=1,2,3,\dots$ ) sei eine Folge von Halbgroupelementen, für welche die Funktionenfolge

$$f_i(x) = f(xb_i)$$

gleichmäßig in  $x$  gegen eine fastperiodische Funktion  $\varphi(x)$  konvergiert. Dann ist  $f(x)$   $\alpha$ -fastperiodisch.

Beweis:  $\varepsilon > 0$  sei beliebig vorgegeben. Wir wählen ein  $i$  so, daß

$$(1) \quad |f(xb_i) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für alle } x \in \mathcal{G}$$

wird, was wegen der gleichmäßigen Konvergenz der  $f_i(x)$  möglich ist.  $\{a_1, \dots, a_n\}$  sei eine Teilung zu  $\varphi(x)$  und  $\varepsilon/3$ . Wir wollen zeigen, daß  $\{a_1, \dots, a_n, b_i\}$  (mit obigem  $b_i$ ) eine Teilung  $\mathcal{Z}\{f(x), \varepsilon\}$  ist. Zunächst überdeckt nach Voraussetzung die Vereinigung der  $a_v$  ganz  $\mathcal{G}$ . Liegen  $c'x, c'y$  in  $a_v$ , so gilt für jedes  $c \in \mathcal{G}$

$$\begin{aligned} & |f(cb_i x) - f(cb_i y)| \\ & \leq |f(cxb_i) - \varphi(cx)| + |\varphi(cx) - \varphi(cy)| + |\varphi(cy) - f(cyb_i)|. \end{aligned}$$

Jeder Summand der rechten Seite ist aber kleiner als  $\varepsilon/3$ , der erste und der dritte wegen (1), der zweite wegen der Fastperiodizität von  $\varphi(x)$ , q. e. d..



Nun gilt eine gewisse Umkehrung dieses Satzes, wobei jedoch an die  $b_i$  noch eine zusätzliche Anforderung gestellt werden muß:

Satz 2:  $f(x)$  sei  $\alpha$ -fastperiodisch auf  $\mathcal{G}$ .  $b_i$  sei eine Folge von Halbgruppenelementen derart, daß für beliebiges  $a \in \mathcal{G}$  stets

$$b_i \in a\mathcal{G} \quad \text{für fast alle } i$$

gilt. Dann gibt es eine Teilfolge  $\bar{b}_j$  der  $b_i$ , so daß

$$f_j(x) = f(x\bar{b}_j)$$

gleichmäßig in  $x$  gegen eine fastperiodische Funktion  $\varphi(x)$  konvergiert.

Beweis: Wir führen den Beweis in drei Schritten. Zuerst wird eine Teilfolge  $\bar{b}_j$  der Folge  $b_i$  konstruiert. Als zweites weisen wir die Konvergenz der Folge  $f(x\bar{b}_j)$  nach und zeigen schließlich die Fastperiodizität der Grenzfunktion.

1. Schritt: Wir gehen von einer monotonen Nullfolge positiver Zahlen  $\varepsilon_i$  aus und bestimmen dazu eine Folge von Minimalteilungen:

$$\tau_i = \tau_i\{f(x), \varepsilon_i\} = \{a_1^{(i)}, \dots, a_{n_i}^{(i)}, a_i\}.$$

Wir betrachten  $\tau_1$ . Hier gibt es (mindestens) ein  $\nu$ , so daß unendlich viele Glieder der Folge  $b_i$  in  $a_\nu^{(1)}$  liegen. Diese bilden, mit der in natürlicher Weise induzierten Numerierung, eine Teilfolge der  $b_i$ . Weil die Voraussetzung über die  $b_i$  auch für diese Teilfolge gilt, können wir sogar annehmen, eventuell unter Weglassung endlich vieler Glieder, daß unsere Teilfolge ganz in  $a_1\mathcal{G}$  liegt. Wir bezeichnen diese Teilfolge mit

$$(2) \quad b_{11}, b_{12}, \dots$$

Mit dieser Folge gehen wir zur Teilung  $\tau_2$ . Auch hier gibt es ein  $\nu$ , so daß unendlich viele Glieder der Folge (2) in  $a_\nu^{(2)}$  liegen, und diese bilden eine Teilfolge von (2) (und damit von  $b_i$ ), von der wir sogar annehmen dürfen, daß alle ihre Glieder in  $a_2\mathcal{G}$  liegen. Wir wollen diese Teilfolge mit

$$(3) \quad b_{21}, b_{22}, \dots$$

bezeichnen. So fahren wir fort und erhalten das Schema



$$b_{11}, b_{12}, b_{13}, \dots$$

$$b_{21}, b_{22}, b_{23}, \dots$$

$$b_{31}, b_{32}, b_{33}, \dots$$

- - - - -

Jede Folge  $b_{ik}$  mit  $k=1,2,\dots$  liegt in dem Durchschnitt  $\alpha_\nu^{(i)} \cap a_i \mathcal{G}$  eines gewissen Teils  $\alpha_\nu^{(i)}$  der Teilung  $\mathcal{Z}_i$  mit  $a_i \mathcal{G}$ , ferner ist sie Teilfolge jeder Folge  $b_{lk}$  ( $k=1,2,\dots$ ) mit  $l < i$ . Wir bilden nun die Diagonalfolge

$$b_{11}, b_{22}, b_{33}, \dots$$

und setzen  $\bar{b}_j = b_{jj}$  ( $j=1,2,\dots$ ).

2. Schritt: Wir zeigen, daß die Folge

$$f_j(x) = f(x\bar{b}_j) = f(xb_{jj})$$

gleichmäßig in  $x$  konvergiert. Wegen der Vollständigkeit des Körpers der komplexen Zahlen brauchen wir nur nachzuweisen, daß es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $N = N(\varepsilon)$  gibt, so daß aus  $j, k \geq N$

$$|f_j(x) - f_k(x)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x$$

folgt. -- Weil die  $\varepsilon_i$  eine monotone Nullfolge bilden, gibt es zu beliebig vorgegebenem  $\varepsilon > 0$  ein  $N = N(\varepsilon)$  mit  $\varepsilon_N \leq \varepsilon$ . Sind nun  $j, k \geq N$ , so liegen (nach Konstruktion unserer Teilfolge)  $\bar{b}_j$  und  $\bar{b}_k$  für geeignetes  $\nu$  sowohl in  $\alpha_\nu^{(N)}$  als auch in  $a_N \mathcal{G}$ :

$$\bar{b}_j, \bar{b}_k \in \alpha_\nu^{(N)} \cap a_N \mathcal{G},$$

$$\text{d. h.:} \quad \bar{b}_j = a_N b'_j, \quad \bar{b}_k = a_N b'_k.$$

Also sind  $b'_j, b'_k, a_N$  so beschaffen, daß

$$a_N b'_j, a_N b'_k \in \alpha_\nu^{(N)}.$$

Hieraus folgt, falls  $j, k \geq N$  sind, für alle  $x \in \mathcal{G}$  nach Definition 1 (man setze dort  $x=b'_j$ ,  $y=b'_k$ ,  $c'=a_N$  und  $c=x$ ):

$$|f_j(x) - f_k(x)| = |f(x\bar{b}_j) - f(x\bar{b}_k)| = |f(xa_N b'_j) - f(xa_N b'_k)|$$

$$< \varepsilon_N \leq \varepsilon.$$

Daher konvergiert die Folge  $f_j(x)$  gleichmäßig in  $x$  gegen eine Grenzfunktion  $\varphi(x)$ .



3. Schritt: Von der Funktion  $\varphi(x)$  haben wir nun noch nachzuweisen, daß sie fastperiodisch ist. Es sei  $\varepsilon > 0$  beliebig vorgegeben. Dann gibt es ein  $N = N(\varepsilon)$  mit  $3\varepsilon_N \leq \varepsilon$ . Zu  $\varepsilon_N$  gehört die Minimalteilung  $\mathcal{T}_N = \{\alpha_1^{(N)}, \dots, \alpha_n^{(N)}, a_N\}$ . Wir zeigen, daß  $\{\alpha_1^{(N)}, \dots, \alpha_n^{(N)}\}$

eine Teilung zu  $\varphi(x)$  und  $\varepsilon$  ist. Zunächst gilt trivialerweise  $\bigcup_{v=1}^n \alpha_v^{(N)} = \mathcal{G}$ . Seien nun  $c', x, y$  so beschaffen, daß  $c'x, c'y \in \alpha_v^{(N)}$  für irgendein  $v$  gilt. Dann bestimmen wir ein  $j \geq N$  so groß, daß

$$|\varphi(x) - f(x\bar{b}_j)| < \varepsilon_N \quad \text{für alle } x \in \mathcal{G}$$

wird, was wegen der gleichmäßigen Konvergenz der  $f_j(x)$  möglich ist. Damit folgt

$$\begin{aligned} & |\varphi(cx) - \varphi(cy)| \\ & \leq |\varphi(cx) - f(cx\bar{b}_j)| + |f(cx\bar{b}_j) - f(cy\bar{b}_j)| + |f(cy\bar{b}_j) - \varphi(cy)| \\ & < 2\varepsilon_N + |f(cx\bar{b}_j) - f(cy\bar{b}_j)|. \end{aligned}$$

Weil  $j \geq N$  ist, liegt  $\bar{b}_j$  in  $a_N \mathcal{G}$ , also ist  $\bar{b}_j = a_N b'_j$  und es ergibt sich

$$|f(cx\bar{b}_j) - f(cy\bar{b}_j)| = |f(cb'_j a_N x) - f(cb'_j a_N y)| < \varepsilon_N.$$

Somit ist

$$|\varphi(cx) - \varphi(cy)| < 3\varepsilon_N \leq \varepsilon,$$

d. h.  $\varphi(x)$  ist fastperiodisch. Damit ist der Beweis von Satz 2 vollendet.

Bemerkung: Aus dem eben geführten Beweis ist ersichtlich, daß man die Forderung "für jedes  $a \in \mathcal{G}$  sollen fast alle  $b_i$  in  $a\mathcal{G}$  liegen", etwas abschwächen kann. Im Hinblick auf die Anwendung im folgenden Paragraphen wollen wir diese schwächere Voraussetzung hier anführen: Geht man von einer zu einer monotonen Nullfolge  $\varepsilon_N$  gehörigen Folge von Minimalteilungen  $\mathcal{T}_N\{f(x), \varepsilon_N\} = \{\alpha_1^{(N)}, \dots, \alpha_n^{(N)}, a_N\}$  aus, so genügt es, für jedes der  $a_N$  zu verlangen, daß fast alle  $b_i$  in  $a_N \mathcal{G}$  liegen. Mit dieser Voraussetzung wäre die Formulierung von Satz 2 dann aber umständlicher.

Wie schon erwähnt, sind unsere Sätze 1 und 2 das Analogon zur Definition III von FRÉCHET [3], unserer Voraussetzung " $b_i \in a\mathcal{G}$  für jedes  $a$  und fast alle  $b_i$ " entspricht bei ihm die Forderung " $b_i \rightarrow +\infty$  für  $i \rightarrow \infty$ ".



## § 7. Der Zerlegungssatz für $\alpha$ -fastperiodische Funktionen.

Weil jede  $\alpha$ -fastperiodische Funktion  $f(x)$   $\omega$ -fastperiodisch ist, muß auch für  $\alpha$ -fastperiodische Funktionen ein Zerlegungssatz gelten. Wie schon erwähnt, sind die bei diesen Funktionen auftretenden Nullmengen spezieller Natur, sie sind gewissermaßen "Anfangsabschnitte"  $\mathcal{G}$ -a $\mathcal{G}$  der abelschen Halbgruppe  $\mathcal{G}$ . Demgemäß wird die im Zerlegungssatz auftretende Nullfunktion von spezieller Art sein: sie wird höchstens auf einem Anfangsabschnitt wesentlich von null verschieden sein. Solche Nullfunktionen wollen wir  $\alpha$ -Nullfunktionen nennen:

Definition 2: Eine beschränkte komplexwertige Funktion  $\omega(x)$  auf  $\mathcal{G}$  heißt  $\alpha$ -Nullfunktion, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $a \in \mathcal{G}$  gibt, so daß

$$|\omega(x)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in a\mathcal{G}$$

gilt.

Damit erhalten wir

Satz 1: Ist  $f(x)$  als Summe

$$(1) \quad f(x) = \varphi(x) + \omega(x)$$

einer fastperiodischen Funktion  $\varphi(x)$  und einer  $\alpha$ -Nullfunktion  $\omega(x)$  darstellbar, so ist  $f(x)$   $\alpha$ -fastperiodisch.

Beweis: Jede  $\alpha$ -Nullfunktion  $\omega(x)$  ist  $\alpha$ -fastperiodisch, denn zu beliebigem  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $a \in \mathcal{G}$ , so daß

$$|\omega(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } x \in a\mathcal{G}$$

gilt, und mit diesem  $a$  ist

$$|\omega(cax) - \omega(cay)| \leq |\omega(cax)| + |\omega(cay)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

für beliebige  $c, x, y \in \mathcal{G}$ . Also ist  $\{\mathcal{G}, a\}$  eine Teilung zu  $\omega(x)$  und  $\varepsilon$ .  $f(x)$  ist dann nach §5, Satz 3 als Summe zweier  $\alpha$ -fastperiodischer Funktionen wieder  $\alpha$ -fastperiodisch. ---

Wir werden nun die Umkehrung von Satz 1 beweisen:

Satz 2: Ist  $f(x)$   $\alpha$ -fastperiodisch auf  $\mathcal{G}$ , dann gibt es eine fastperiodische Funktion  $\varphi(x)$  und eine  $\alpha$ -Nullfunktion  $\omega(x)$ , so daß sich  $f(x)$  als Summe

$$f(x) = \varphi(x) + \omega(x)$$

darstellen läßt.



Beweis: Die Beweisidee ist die gleiche wie die beim Beweis von Satz 2 im §6. Wir werden eine Folge  $f_j(x)$  konstruieren, die gegen eine fastperiodische Funktion  $\varphi(x)$  konvergiert und dann zeigen, daß  $f(x) - \varphi(x)$  eine  $\alpha$ -Nullfunktion ist.

Zur Konstruktion der Folge  $f_j(x)$  gehen wir wieder von einer monotonen Nullfolge positiver Zahlen  $\varepsilon_i$  ( $i=1,2,3,\dots$ ) aus und betrachten dazu eine Folge von Minimalteilungen

$$\mathcal{F}_i^* = \mathcal{F}_i^* \{f(x), \varepsilon_i\} = \{a_1^{(i)}, \dots, a_n^{(i)}, a_i^*\}.$$

Diese werden wir gemäß §5, Satz 7 abändern, wobei wir noch verwenden, daß sich die Teile  $a_{\nu}^{(i)}$  der Minimalteilungen  $\mathcal{F}_i^*$  quer durch die ganze Halbgruppe erstrecken. Zu jedem  $i$  gibt es ein  $\nu_0 = \nu_0(i)$ , so daß das neutrale Element  $e$  in  $a_{\nu_0}^{(i)}$  liegt. Nun ist

$$(\varepsilon_1) \quad \mathcal{D}_1 = a_{\nu_0}^{(1)} \cap a_1^* \neq \emptyset.$$

Wir wählen ein beliebiges  $\tau_1 \in \mathcal{D}_1$ . Dann ist  $\tau_1 = a_1^* \cdot a_1'$ . Ferner ist

$$(\varepsilon_2) \quad \mathcal{D}_2 = a_{\nu_0}^{(2)} \cap \tau_1 a_2^* \neq \emptyset,$$

und wir wählen  $\tau_2$  beliebig aus  $\mathcal{D}_2$ , es ist somit  $\tau_2 = \tau_1 a_2^* \cdot a_2'$ . So fahren wir fort und erhalten allgemein:

$$(\varepsilon_i) \quad \mathcal{D}_i = a_{\nu_0}^{(i)} \cap \tau_{i-1} a_i^* \neq \emptyset,$$

$\tau_i$  wird beliebig aus  $\mathcal{D}_i$  gewählt, dann ist  $\tau_i = \tau_{i-1} a_i^* \cdot a_i'$ .

Für alle  $N=1,2,3,\dots$  gilt nunmehr

A)  $\tau_N \in a_{\nu_0}^{(N)}$  und  $\tau_i = \tau_N a_i$ , falls  $i \geq N$  (mit geeignetem  $a_i$ );

B)  $\mathcal{F}_N^* = \mathcal{F}_N^* \{f(x), \varepsilon_N\} = \{a_1^{(N)}, \dots, a_n^{(N)}, \tau_N\}$  ist eine Minimalteilung zu  $f(x)$  und  $\varepsilon_N$ .

Die  $\tau_i$  sind gegenüber anderen Halbgruppenelementen ausgezeichnet. Ihnen entsprechen in der Theorie der fastperiodischen Funktionen auf der Gruppe der reellen Zahlen die "Fastperioden" (s. MAAK [5], §24), es ist üblich, diese mit dem Buchstaben  $\tau$  zu bezeichnen. Unsere  $\tau_i$  können wir  $\alpha$ -Fastperioden nennen. Diese sind so erklärt:  $f(x)$  sei  $\alpha$ -fastperiodisch und  $\{a_1, \dots, a_n, a\}$  sei eine Teilung zu  $f(x)$  und  $\varepsilon$ . Dann heißt ein



Halbgruppenelement  $\tau$  eine  $\alpha$ -Fastperiode zu  $f(x)$  und  $\varepsilon$ , wenn für alle  $x \in \mathcal{G}$

$$|f(x\tau) - f(x)| < \varepsilon$$

gilt. Alle Elemente aus demjenigen Teil  $\mathcal{A}_\nu$  einer Minimalteilung, der das neutrale Element  $e$  enthält, sind  $\alpha$ -Fastperioden, und der Satz, daß sich die Teile einer Minimalteilung quer durch  $\mathcal{G}$  erstrecken, besagt dann, daß die  $\alpha$ -Fastperioden relativ dicht in  $\mathcal{G}$  liegen. ---

Nun zurück zu unserem Beweis von Satz 2 ! Weil

$$\tau_i = \tau_N a_i \quad \text{für } i \geq N$$

(mit geeignetem  $a_i$ ) gilt (s. A)), haben wir für jedes  $N=1,2,3,\dots$

$$\tau_i \in \tau_N \mathcal{G} \quad \text{für fast alle } i.$$

Nach der Bemerkung am Schlusse von §6 (man setze dort  $a_N = \tau_N$  und  $b_i = \tau_i$ ) ist der dortige Satz 2 anwendbar, es gibt also eine Teilfolge  $\tau_{jj} = \tau_{jj}$  der  $\tau_i$ , so daß die Funktionenfolge

$$f_j(x) = f(x \cdot \tau_{jj})$$

gleichmäßig in  $x$  gegen eine fastperiodische Funktion  $\varphi(x)$  konvergiert. Also haben wir nur noch zu zeigen, daß

$$\omega(x) = f(x) - \varphi(x)$$

eine  $\alpha$ -Nullfunktion ist. Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig vorgegeben. Wir müssen zeigen, daß es ein  $a = a(\varepsilon)$  gibt, so daß

$$|\omega(x)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in a\mathcal{G}$$

gilt. Zunächst gibt es ein  $N = N(\varepsilon)$  derart, daß  $2N =$  ist.

Wir wählen  $j \geq N$  und so groß, daß

$$|f_j(x) - \varphi(x)| < \varepsilon_N \quad \text{für alle } x \in \mathcal{G}$$

wird, was wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Folge  $f_j(x)$  möglich ist. Dann wird

$$\begin{aligned} |\omega(x)| &= |f(x) - \varphi(x)| \leq |f(x) - f_j(x)| + |f_j(x) - \varphi(x)| \\ &< \varepsilon_N + |f(x) - f_j(x)| = \varepsilon_N + |f(x) - f(x \tau_{jj})|, \end{aligned}$$

und weil  $\tau_{jj}$  ein  $\tau_i$  mit  $i \geq j$  ist, folgt weiter:

$$= \varepsilon_N + |f(x) - f(x \tau_i)|.$$



Da  $\tau_i$   $\alpha$ -Fastperiode zu  $f(x)$  und  $\varepsilon_i$  (bezüglich der Teilung  $\mathcal{I}_i = \{a_1^{(i)}, \dots, a_n^{(i)}, \tau_i\}$ ) ist, folgt

$$|f(x) - f(x\tau_i)| < \varepsilon_i \quad \text{für alle } x \in \tau_i \mathcal{G}.$$

Setzt man schließlich  $a = \tau_i (= \tau_{jj})$  und beachtet, daß wegen  $i \geq j$   $\varepsilon_i \leq \varepsilon_N$  ist, so ergibt sich

$$|\omega(x)| < \varepsilon_N + \varepsilon_i \leq 2\varepsilon_N \leq \varepsilon \quad \text{für alle } x \in a \mathcal{G}.$$

Also ist  $\omega(x)$   $\alpha$ -Nullfunktion, q. e. d..

Satz 1 und Satz 2 ergeben zusammen den

Satz 3 (Zerlegungssatz): Eine Funktion  $f(x)$  auf der abelschen Halbgruppe  $\mathcal{G}$  ist dann und nur dann  $\alpha$ -fastperiodisch, wenn sie sich in der Form

$$(1) \quad f(x) = \varphi(x) + \omega(x)$$

darstellen läßt, wobei  $\varphi(x)$  fastperiodisch und  $\omega(x)$   $\alpha$ -Nullfunktion ist.

Es gilt auch hier, daß die Zerlegung (1) eindeutig ist, man beweist wie bei  $\omega$ -fastperiodischen Funktionen den

Satz 4 (Eindeutigkeitssatz): Die zu einer  $\omega$ -fastperiodischen Funktion  $f(x)$  gehörige Zerlegung

$$f(x) = \varphi(x) + \omega(x)$$

ist eindeutig.

(Am Beweis ändert sich gegenüber dem von Satz 8 in §3 nur, daß die Nullmengen von der speziellen Form  $\mathcal{G} - a \mathcal{G}$ , mit geeignetem  $a \in \mathcal{G}$ , sind.)

Bemerkung: Es erhebt sich die Frage, inwieweit man den eben geführten Beweis - bei einer entsprechenden Definition des Begriffes  $\alpha$ -fastperiodisch - auf beliebige nichtabelsche Halbgruppen übertragen kann. Dabei begegnet man zunächst der folgenden Schwierigkeit: Die Anfangsabschnitte  $\mathcal{G} - a \mathcal{G} b$  einer beliebigen Halbgruppe sind nicht notwendig Nullmengen (s. MAAK [7], §3). Ersetzt man nun in der Definition von  $\omega$ -fastperiodisch die Nullmengen  $\mathcal{N}_\varepsilon$  durch Mengen  $\mathcal{G} - a \mathcal{G} b$  und fordert zusätzlich, daß für  $\varepsilon' < \varepsilon$

$$(2) \quad \mathcal{G} - a' \mathcal{G} b' \supseteq \mathcal{G} - a \mathcal{G} b$$



sein soll, so kann man den Beweis des Zerlegungssatzes für  $\alpha$ -fastperiodische Funktionen fast wörtlich wie eben führen. Man erhält jedoch in der Zerlegung keine Nullfunktion, sondern eine Funktion  $\omega(x)$ , für die es zu jedem  $\varepsilon > 0$  zwei Elemente  $a, b \in G$  gibt, so daß

$$|\omega(x)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in aG \cap b$$

gilt. Man kann allerdings weder die Eindeutigkeit der Zerlegung noch die Existenz eines Mittelwertes folgern.

### § 8. Der Mittelwertsatz.

Wir haben für  $\alpha$ -fastperiodische Funktionen den Zerlegungssatz hergeleitet, ohne die Existenz eines Mittelwertes für diese Funktionen zu verwenden. Umgekehrt folgt nun der Mittelwertsatz leicht aus dem Zerlegungssatz.

Satz 1 (Mittelwertsatz): Jede  $\alpha$ -fastperiodische Funktion  $f(x)$  ist ergodisch, d. h. zu beliebig vorgegebenem  $\varepsilon > 0$  gibt es gewisse Halbgruppenelemente  $w_1, \dots, w_m$ , so daß für alle  $c \in G$

$$\left| \frac{1}{m} \sum_{\mu=1}^m f(w_\mu) - \frac{1}{m} \sum_{\mu=1}^m f(cw_\mu) \right| < \varepsilon$$

gilt.

Beweis: Wir zeigen, daß die durch  $f(x)$  eindeutig bestimmte  $\alpha$ -Nullfunktion  $\omega(x)$  in der Zerlegung

$$f(x) = \varphi(x) + \omega(x)$$

ergodisch ist. Dann muß, da  $\varphi(x)$  ergodisch ist, wegen der Linearität der Mittelwertoperation auch  $f(x)$  ergodisch sein. - Es sei  $\varepsilon > 0$  beliebig vorgegeben. Dann können wir ein  $a$  so bestimmen, daß

$$|\omega(x)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in aG$$

gilt. Also ist speziell  $|\omega(a)| < \varepsilon$  und ferner

$$|\omega(ca)| < \varepsilon \quad \text{für alle } c \in G.$$

Demzufolge ist  $\omega(x)$  ergodisch mit dem Mittelwert 0, q. e. d..



Daraus ergibt sich direkt

Satz 2: Der Mittelwert einer  $\alpha$ -fastperiodischen Funktion  $f(x)$  ist gleich dem ihres fastperiodischen Anteils; d. h.: Hat  $f(x)$  die Zerlegung

$$f(x) = \varphi(x) + \omega(x) ,$$

so ist

$$M_x \{f(x)\} = M_x \{ \varphi(x) \} .$$

Damit können wir nun, wie in §4, zu jeder  $\alpha$ -fastperiodischen Funktion  $f(x)$  eine Fourierreihe aufstellen; über diese gilt alles dort Gesagte.



Anhang:  $\omega$ -fastperiodische Funktionen mit Werten  
in einem Banachraum.

Es sei  $\mathcal{G}$  jetzt wieder eine beliebige Halbgruppe mit neutralem Element  $e$ .  $\mathcal{L}$  sei ein beliebiger komplexer Banachraum (s. BANACH [1], BOURBAKI [2]). Die Norm eines Elements (Vektors)  $h \in \mathcal{L}$  bezeichnen wir mit  $\|h\|$ .

Wir verallgemeinern den Begriff der  $\omega$ -fastperiodischen Funktion auf einer Halbgruppe, indem wir nicht komplexwertige Funktionen betrachten, sondern Funktionen der Elemente  $x \in \mathcal{G}$  mit Werten in unserem Banachraum  $\mathcal{L}$ :

Definition 1: Eine beschränkte Funktion  $f(x)$  auf  $\mathcal{G}$  mit Werten im Banachraum  $\mathcal{L}$  heißt  $\omega$ -fastperiodisch, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine endliche Anzahl von Teilmengen  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$  von  $\mathcal{G}$  und eine Nullmenge  $\mathcal{N}_\varepsilon \subset \mathcal{G}$  gibt, so daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$1) \mathcal{A}_1 \cup \dots \cup \mathcal{A}_n = \mathcal{G};$$

2) Gilt für gewisse Elemente  $x, y, c', d'$  und geeignetes  $\nu = 1, \dots, n$

$$c'xd', c'yd' \in \mathcal{A}_\nu,$$

so folgt für alle  $c, d \in \mathcal{G}$ , für welche

$$cxd, cyd \in \mathcal{G} - \mathcal{N}_\varepsilon$$

erfüllt ist,

$$\|f(cxd) - f(cyd)\| < \varepsilon.$$

Wiederum nennen wir  $\{\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n, \mathcal{N}_\varepsilon\}$  eine Teilung  $\mathcal{T}(f(x), \varepsilon)$  und diese heißt minimal, falls  $n$  minimal ist. Auch die Definition einer  $\alpha$ -fastperiodischen Funktion auf einer abelschen Halbgruppe mit Werten in  $\mathcal{L}$  können wir genau so fassen wie die Definition 1 in §5, wir haben lediglich den Absolutbetrag  $||$  durch die Norm  $\|$  zu ersetzen. Das gleiche gilt für die Begriffe fastperiodische Funktion, Nullfunktion und  $\alpha$ -Nullfunktion.

Die durch die Definition 1 erklärten Funktionen wollen wir auch "abstrakte"  $\omega$ -fastperiodische Funktionen nennen, und im



Gegensatz dazu mögen die komplexwertigen Funktionen "numerisch" heißen. Viele Sätze der numerisch  $\omega$ -fastperiodischen Funktionen gelten auch für die abstrakten. So können wir, wie in §2, zeigen, daß mit  $f(x)$  auch  $f(\bar{c}x\bar{d})$  und  $\gamma f(x)$  ( $\gamma$  komplex), sowie mit  $f(x)$  und  $g(x)$  auch  $f(x) + g(x)$  abstrakt  $\omega$ -fastperiodisch sind. Auch der gleichmäßige Limes (bezüglich der Norm) einer Folge abstrakt  $\omega$ -fastperiodischer Funktionen ist  $\omega$ -fastperiodisch; kurz: Die abstrakt  $\omega$ -fastperiodischen Funktionen bilden einen abgeschlossenen komplexen linearen Raum. --- Weiter können wir zeigen:

Satz 1: Ist  $f(x)$  abstrakt  $\omega$ -fastperiodisch, so ist  $\|f(x)\|$  numerisch  $\omega$ -fastperiodisch.

Beweis: Wir gehen von einer Teilung  $\mathcal{T}\{f(x), \varepsilon\} = \{a_1, \dots, a_n, \pi_\varepsilon\}$  aus und zeigen, daß diese eine Teilung zu  $\|f(x)\|$  und  $\varepsilon$  ist. Sind nämlich  $cxd$ ,  $cyd$  zulässig bezüglich  $\{a_1, \dots, a_n, \pi_\varepsilon\}$ , so folgt

$$\left| \|f(cxd)\| - \|f(cyd)\| \right| \leq \|f(cxd) - f(cyd)\| < \varepsilon, \quad \text{q. e. d..}$$

Satz 2: Sind  $f(x)$  abstrakt  $\omega$ -fastperiodisch und  $f'(x)$  numerisch  $\omega$ -fastperiodisch auf  $\mathcal{G}$ , so ist  $f'(x) \cdot f(x)$  abstrakt  $\omega$ -fastperiodisch.

Beweis: Es sei  $K = \max \left\{ \sup_{x \in \mathcal{G}} \|f(x)\|, \sup_{x \in \mathcal{G}} |f'(x)| \right\}$ .

Wir gehen von den Teilungen

$$\mathcal{T}\{f(x), \frac{\varepsilon}{2K}\} = \{a_1, \dots, a_n, \pi_\varepsilon\} \quad \text{und} \quad \mathcal{T}\{f'(x), \frac{\varepsilon}{2K}\} = \{a'_1, \dots, a'_m, \pi'_\varepsilon\}$$

aus und bilden die Mengen

$$\mathcal{L}_s = \mathcal{L}_{\nu\mu} = a_\nu \wedge a'_\mu \quad (\nu=1, \dots, n; \mu=1, \dots, m; s=1, \dots, r=nm)$$

$$\pi_\varepsilon = \pi_\varepsilon \cup \pi'_\varepsilon$$

Dann ist  $\{\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_r, \pi_\varepsilon\}$  eine Teilung zu  $f'(x)f(x)$  und  $\varepsilon$ , denn zunächst ist  $\mathcal{L}_1 \vee \dots \vee \mathcal{L}_r = \mathcal{G}$ , und sind  $cxd, cyd$  zulässig bezüglich  $\{\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_r, \pi_\varepsilon\}$ , so sind sie es erst recht bezüglich

$\{a_1, \dots, a_n, \pi_\varepsilon\}$  und  $\{a'_1, \dots, a'_m, \pi'_\varepsilon\}$ , woraus sich ergibt:

$$\begin{aligned} & \|f'(cxd)f(cxd) - f'(cyd)f(cyd)\| \\ & \leq |f'(cxd)| \cdot \|f(cxd) - f(cyd)\| + \|f(cyd)\| \cdot |f'(cxd) - f'(cyd)| \\ & < K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} + K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} = \varepsilon. \end{aligned}$$



Wie im §1 kann man nun für Funktionen mit Werten in einem Banachraum den Begriff ergodisch einführen und für diese einen Mittelwert erklären; der Mittelwert ist dann ein Element  $M$  des Banachraumes  $\mathcal{B}$  (vgl. MAAK [6]). Wir können also alle Sätze über  $\omega$ -Funktionen, die wir im §1 abgeleitet haben, sofort übertragen. Speziell besitzt dann jede abstrakte  $\omega$ -Funktion, und damit jede  $\omega$ -fastperiodische Funktion, einen solchen Mittelwert.

Daraus ergibt sich der Zerlegungssatz der abstrakt  $\omega$ -fastperiodische Funktionen  $f(x)$ : Wir führen die "Distanz"

$$\Delta(x, y) = M_c \{ \|f(cx) - f(cy)\| \}$$

ein. Diese existiert, weil nach Satz 1 die Norm einer  $\omega$ -fastperiodischen Funktion numerisch  $\omega$ -fastperiodisch ist. Wie im §3 zeigt man, daß  $\Delta(x, y)$  (numerisch) fastperiodisch in  $x$  und  $y$  ist. Dann sind die wie dort erklärten Funktionen  $F_1(\Delta(x, e))$  und  $g_1(x)$  numerisch fastperiodisch und man setzt

$$\varphi_1(x) = M_y \{ f(xy) \cdot g_1(y) \}.$$

Der rechts stehende Mittelwert existiert, da nach Satz 2 die Funktion  $g_1(y) \cdot f(xy)$  abstrakt  $\omega$ -fastperiodisch in  $y$  ist. Auch hier gilt, daß die Menge  $\{\varphi_1(x)\}$  gleichgradig beschränkt und gleichgradig (abstrakt) fastperiodisch ist. Beim Beweis muß man nur beachten, daß stets

$$\| M_x \{ h(x) \} \| \leq M_x \{ \| h(x) \| \}$$

gilt. (Dies zeigt man wie im numerischen Fall.) Die Folge der  $\varphi_1(x)$  enthält demgemäß wieder eine gleichmäßige konvergente Teilfolge, und deren fastperiodische Grenzfunktion  $\varphi(x)$  kann man dann als "fastperiodischen Anteil" von  $f(x)$  nehmen. Alle anderen Sätze des §3 folgen analog und wir haben schließlich genau wie dort das Ergebnis:

Satz 3 (Eindeutige Zerlegung): Jede Funktion  $f(x)$  auf der Halbgruppe  $\mathcal{G}$  mit Werten in einem beliebigen Banachraum  $\mathcal{B}$  ist dann und nur dann  $\omega$ -fastperiodisch, wenn sie sich in der Form

$$f(x) = \varphi(x) + \omega(x)$$

darstellen läßt, wobei  $\varphi(x)$  fastperiodisch und  $\omega(x)$  Nullfunktion ist. Diese Zerlegung ist eindeutig.



Der entsprechende Satz für  $\alpha$ -fastperiodische Funktionen folgt aus diesem, läßt sich jedoch auch wie im §7 ohne Zuhilfenahme der Existenz eines Mittelwertes direkt herleiten. In der Formulierung lautet dieser Satz wie der eben abgeleitete, man braucht nur  $\omega$ -fastperiodisch durch  $\alpha$ -fastperiodisch und Nullfunktion durch  $\alpha$ -Nullfunktion zu ersetzen.

Natürlich gilt auch hier, daß eine abstrakte Funktion, die sowohl fastperiodisch als auch Nullfunktion ist, identisch verschwindet. Ebenfalls sieht man sofort, daß die Nullfunktionen (und auch die  $\alpha$ -Nullfunktionen) einen invarianten abgeschlossenen linearen Raum bilden.



Literaturverzeichnis.

- [1] S. BANACH: Théorie des opérations linéaires.  
Warschau 1932.
- [2] N. BOURBAKI: Espaces vectoriels topologiques.  
Paris 1953.
- [3] M. FRÉCHET: Les fonctions asymptotiquement presque-périodiques. Revue Scientifique 79 (1941), S. 341 - 354.
- [4] M. FRÉCHET: Une application des fonctions asymptotiquement presque-périodiques à l'étude des familles de transformations ponctuelles et au problème ergodique. Revue Scientifique 79 (1941), S. 407 - 417.
- [5] W. MAAK: Fastperiodische Funktionen. Berlin 1950.
- [6] W. MAAK: Fastperiodische invariante Vektormoduln in einem metrischen Vektorraum.  
Math. Ann. 122 (1950), S. 157 - 166.
- [7] W. MAAK: Integralmittelwerte von Funktionen auf Gruppen und Halbgruppen. Journal f. d. reine und angew. Math. 190 (1952), S. 34 - 48.
- [8] W. MAAK: Fastperiodische Funktionen auf Halbgruppen. Acta Math. 87 (1952), S. 33 - 58.
- [9] E. SCHIEFERDECKER: Die fastperiodischen Funktionen einer Oreschen Halbgruppe. Archiv der Math. 6 (1955), S. 428 - 438.



### Lebenslauf.

Am 28. Dezember 1928 wurde ich, Horst Franz Wilhelm Keiner, zu Zella-Mehlis geboren als Sohn des Werkmeisters Ernst Keiner und seiner Ehefrau Meta geb. Wahl. Ich besuchte in Coburg die Volksschule und ab 1939 die Oberrealschule, an welcher ich mich 1948 der Reifeprüfung unterzog. Anschließend war ich drei Semester an der Phil.-Theol. Hochschule Bamberg eingeschrieben. Vom Sommersemester 1950 bis zum Sommersemester 1953 studierte ich an der Universität München Mathematik und Physik. Im Herbst 1953 legte ich hier das Staatsexamen für das Höhere Lehramt ab, im Februar 1954 die Diplomprüfung in Mathematik.

Vorlesungen und Übungen hörte ich bei den Herren Professoren Dr. AUMANN, Dr. BOPP, Dr. BUCERIUS, Dr. GERLACH, Dr. KÖNIG, Dr. MAAK, Geh.-Rat Dr. PERRON, Dr. ROLLWAGEN, Dr. R. SCHMIDT, Dr. SEEBACH, sowie bei den Herren Dr. RÖHRL, Dr. ROQUETTE und Dr. SCHMEIDLER.

Ihnen allen möchte ich an dieser Stelle meinen verbindlichsten Dank aussprechen. Herrn Professor Dr. W. MAAK bin ich für das stete Interesse am Zustandekommen der vorliegenden Arbeit sowie für viele wertvolle Ratschläge zu besonderem Dank verpflichtet.









